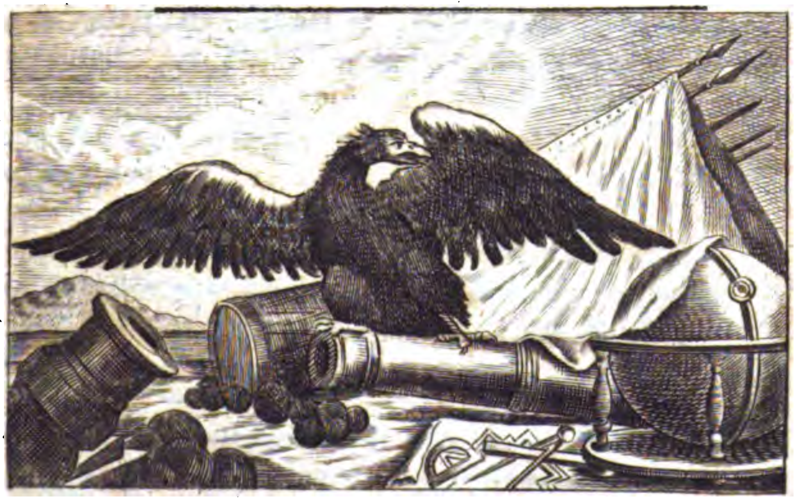

CEDANT ARMA

HISTOIRE
DE
L'ACADÉMIE ROYALE
DES
SCIENCES
ET
BELLES-LETTRES.

ANNÉE MDCCLX.



A BERLIN.

CHEZ HAUDE ET SPENER,
Libraires de la Cour & de l'Académie Royale.
MDCCLXVII.

Imprimé
par ordre de l'Académie.

TABLE.

CLASSE
DE PHILOSOPHIE EXPÉRIMENTALE.

CLASSE

CLASSE
DE MATHÉMATIQUE.

CLASSE

CLASSE
DE PHILOSOPHIE SPÉCULATIVE.

CLASSE
DE BELLES-LETTRES.

FAUTE À CORRIGER

p. 347. dans la note, le troisieme mot Grec doit se lire *ὑπεξαίρεσις.*



MÉMOIRES
DE
L'ACADÉMIE ROYALE
DES
SCIENCES
ET
BELLES - LETTRES.

CLASSE DE PHILOSOPHIE EXPÉRIMENTALE.

* * *

CONSIDÉRATIONS

SUR

L'INFLUENCE QUE L'ILLUSTRE NEWTON ATTRIBUE À LA DIVERSE RÉFRANGIBILITÉ DE LA LUMIERE SUR LES LUNETTES À RÉFRACTION.

PAR M. LE COMTE DE REDERN *).

L'admiration que nous avons pour la mémoire des grands hommes, dont les lumieres ont éclairé l'eſpece humaine, eſt le tribut que nous payons néceſſairement à leurs talents, lorsque nous ſommes capables de ſentir & de connoitre leur mérite. L'enthouſiaſme aveugle pour leurs ſentiments eſt ordinaire-

 ment

*) Lû dans l'aſſemblée publique du mois de Juin.

ment l'effet d'un orgueuil ſtupide, inſenſible aux attraits de la vérité, & incapable de la connoitre, qui adopte des ſentiments par air, & les ſoutient de même. L'homme qui ignore eſt prêt à s'inſtruire; l'ignorant qui ſe croit inſtruit, eſt un malade ſans remede, livré au menſonge & à l'erreur.

Les torts que ces funeſtes préventions ont faits aux progrès de la vérité, en conſacrant comme des articles de foi, les opinions les plus abſurdes & les plus extravagantes, impoſent l'obligation de l'examen. Diſſiper les ſombres nuages de ſuperſtitions vulgaires, c'eſt l'ouvrage du tems. Porter les ſentimens des hommes dont les belles découvertes ont fondé l'empire de la vérité à l'autel de la raiſon, ténant d'une main le flambeau de l'expérience & de l'autre la balance du vrai & du faux, les marques de l'empreinte qui fixe leur véritable valeur; c'eſt un droit qu'ils ont ſur notre reconnoiſſance.

Tels ſont les motifs qui m'ont déterminé à ſoumettre à l'examen l'application que l'immortel Newton fait lui-même de ſa belle découverte de la diverſe réfrangibilité de la lumiere aux lunettes à réfraction, dans la ſeptieme Propoſition du premier Livre de ſon Traité d'Optique. J'ai crû qu'il importoit à la vérité de le faire; je propoſe mes doutes pour m'éclairer: ils ſont autant de marques d'eſtime & d'admiration pour ce Grand-Homme, qui nous a dévoilé l'art ingénieux de décompoſer la lumiere, & de faire voir à l'oeil les rayons homogenes ou primitifs, qui forment ce Tableau magique & merveilleux de la nature, en pretant leurs couleurs à la matiere, ou en produiſant par leur différente impulſion les phénomenes de couleurs pour le ſens de la vue.

Les Anciens n'ignoroient pas l'effet du Priſme, pour manifeſter les couleurs de la lumiere. Seneque en fait mention dans le ſeptieme Chapitre du premier livre de ſes Queſtions naturelles: le Priſme fait voir, dit-il, en recevant de côté la lumiere du Soleil, les couleurs de l'Arc-en-Ciel; mais, pour ſe débarraſſer de toute recherche d'un Phénomene ſi ſingulier, il décide ſans balancer, que ce n'eſt que la production

duction d'une apparence des fausses couleurs, telles que le cou des colombes les produit selon qu'il change de situation *).

J'aurois tort de m'arrêter à toutes les visions absurdes qu'on a debitées lorsque je puis faire parler Newton, l'interprete de la Nature.

Un raion de lumiere, qui tombe obliquement sur la surface d'un milieu diaphane, plus dense que l'air, subit en le traversant, outre la réfraction connue, une autre plus merveilleuse encore; il cesse d'être un seul raion, comme auparavant, de former une seule ligne ou trace de lumiere, il se divise, ou se disperse en plusieurs raions qui s'écartent les uns des autres par de petits angles colorés diversement, ou pour m'exprimer juste avec l'illustre Newton; doués d'une certaine puissance, à exciter une sensation de telle couleur; Celui qui le moins réfrangible conserve le plus la direction du raion même, c'est le rouge; l'orange s'écarte de lui par un petit angle & approche plus de la perpendiculaire; le jaune s'éloigne de l'orangé; le verd du jaune; le bleu du verd; l'indigo du bleu; & le violet enfin de l'indigo; c'est celui qui le plus réfrangible s'écarte & approche le plus de la perpendiculaire.

L'ordre & la réfraction de ces raions colorés est le même, que celui des Couleurs de l'arc en ciel; l'illustre Newton établit la loi de leur diverse réfrangibilité, sur les expériences du Prisme, dans le rapport des sinus de différens angles, sous lesquels ils sont rompus, avec celui de l'incidence du raion même.

Comme 44 à 68 pour le raion rouge qui subit la moindre réfraction, & comme 44 à 69 pour le violet dont la réfraction est la plus forte.

Le Sinus de l'Angle de l'incidence du raion *abc*, est à celui de l'Angle de réfraction *ebf* du raion rouge comme 68 à 44; & à celui de l'angle réfracté *gbf* du Raion Violet comme 69 à 44. La loi du rapport des Sinus de l'angle de l'incidence & de la réfraction Fig. 1.

 du

*) *Virgula solet fiere vitrea stricta, vel pluribus angulis in modum clavæ torosa: hæc si ex transverso solem accipit, colorem talem qualis in Arcu videri solet reddit; Apparet non fieri ullum colorem, sed speciem falsi coloris, qualem columbarum cervix & sumit & ponit, utcumque deflectitur.*

du raion même, en paſſant de l'air dans le verre, comme 3 à 2, ou 31 à 20, eſt cenſée alors ſuivre la réfraction des raions colorés moiens, ou intermédiaires entre les deux extremes; le rouge & le violet. Ces loix ſont le réſultat des ſix premieres Propoſitions du premier livre; je vais expoſer l'application que ce Grand-Homme fait lui-même de cette belle découverte aux lunettes à réfraction dans la ſeptieme. Ecrivant en françois, je citerai la traduction françoiſe du Traité d'optique faite par Mr. Coſte, & revue par Mr. Deſaguliers, ſous les yeux de Néwton même. Il inſere, dit-il, cette propoſition, pour faire voir aux Géométres, combien ils ſe ſont trompés, en attribuant l'imperfection des lunettes à la ſphéricité des lentilles.

La confuſion qui réſulte de la figure ſphérique, & par conſéquent de l'ouverture des lentilles, eſt ſi petite ſelon lui, qu'elle ne mérite aucune conſidération, & la correction en ſeroit très-aiſée.

La différente réfrangibilité des raions colorés eſt la cauſe unique de l'imperfection des lunettes, & c'eſt un mal, ſans remede.

Il rappelle d'abord la troiſieme expérience, pour déterminer l'effet de la réfrangibilité dans le paſſage de la lumiere à travers une lentille; & il en ajoute une nouvelle qu'il rapporte dans un grand détail, pour vérifier les conſéquences qu'il tire de l'autre.

Les raions colorés, diverſement réfrangibles, éprouvent une réfraction différente, en traverſant une lentille ſphérique, ou l'objectif d'une lunette; rompus différemment, ils ſe diſperſent & ne rencontrent pas l'axe de la lentille dans un ſeul & même point ou foier.

Les raions rouges moins réfrangibles que les autres, forment en s'écartant moins de la droite, ou de la direction du raion, leur foier plus loin de la lentille que les violets, qui, rompus davantage vers la perpendiculaire, forment le leur plus près de la lentille.

Il fixe la diſtance entre les foiers des raions rouges & des violets, en ſuppoſant la diſtance de l'objet infinie, qui eſt le cas des objectifs des lunettes, comme 27 à 28, ou égale à la 27 ou 28 partie de toute la longueur du foier de la lentille. Et il ajoute p. 109; De là ceux qui ſont exercés dans l'Optique, concluront ſans peine, que la largeur du

moin-

moindre espace circulaire où les verres objectifs des Telescopes puissent rassembler toutes sortes de raions paralleles, est environ la 27me partie de la moitié de l'ouverture du verre, ou la 55me partie de toute l'ouverture.

A la suite de la seconde expérience p. 123. il établit la grandeur de ce point lumineux de la maniere suivante; le diametre du plus petit cercle dans lequel les raions puissent être rassemblés, est environ la 55me partie du diametre de l'ouverture du verre. Et sur la considération qu'il fait ensuite de la densité & de la rareté de la lumiere de ce cercle, il le réduit p. 129. à la 250me partie.

Ainsi, dit-il, l'image sensible d'un point lumineux est à peine plus large qu'un cercle dont le diametre est la 250me partie du diametre de l'ouverture de l'objectif d'un bon Telescope.

Lorsque le point lumineux dont émanent les raions n'est pas infini; s'il se trouvoit, je crois que ce doit être à la double distance du foier, il paroit que c'est à la distance du foyer même, si le cas étoit possible; la dispersion des foyers des raions rouges & des violets ne sera plus la 27me, mais la 14me partie du foier de la lentille. J'ai déjà rapporté, qu'il établit sur ces mêmes expériences, la loi de la diverse réfraction des raions colorés dans le rapport des sinus de leurs angles de réfraction avec le sinus de l'angle de l'incidence du raion même.

Des méprises dans des expériences très-belles, mais manquées & insuffisantes pour démêler le vrai rapport entre des grandeurs infiniment petites, l'induisirent à établir, ou plutôt à admettre sans cet examen sévere, auquel il s'étoit imposé de soumettre la nature, une loi fausse.

Il ne s'apperçut pas de la contradiction dans laquelle il tomboit avec la loi du rebroussement du rayon, qui ne pouvoit plus avoir lieu avec celle qu'il établissoit pour la réfraction des raions colorés.

Loi qu'il avoit établie, peu avant lui-même dans l'Axiome troisieme, de ceux qui précédent au nombre de huit, les propositions de l'Optique. Si un raion rompù est renvoié directement au point d'incidence, il sera rompu dans la ligne déjà décrite par le raion incident.

C'est

C'eſt à Mr. Euler que nous devons la connoiſſance de la loi véritable, de celle que ſuit la nature pour les raions colorés.

Il a démontré par l'Analyſe & par les raiſonnemens les plus profonds; que, pour les raions de différentes couleurs, les logarithmes de leur réfraction tiennent entr'eux un rapport conſtant; qu'elle eſt en raiſon des logarithmes des angles de leur diverſe réfraction.

La diſperſion des raions, ne préſentant pas ſelon toutes les apparences le principe d'un rapport abſolu, que l'illuſtre Newton cherchoit, pour faire la comparaiſon de la confuſion de la diverſe réfrangibilité, avec celle qui réſulte de la figure ſphérique; il conſidere l'effet de la réfrangibilité ſous un autre point de vue que celui de la diſperſion des images colorées; dans la grandeur du point lumineux circulaire, que les raions ſolaires forment dans les foyers des objectifs; en ne conſidérant qu'une ſeule lentille abſolument.

J'ai déja rapporté de quelle maniere cette grandeur eſt fixée égale à la 55me partie de l'ouverture de l'objectif, comme corollaire, ou une conſéquence néceſſaire, & immédiate du rapport de la diſperſion, des vraies images des raions colorés, aux foyers des lentilles comme 1 à 27.

La conſidération ſeule des raions dans leur paſſage à travers une lentille, peut arrêter l'état de la queſtion; en montrant les raions, qui forment ce cercle lumineux & fixer les conſéquences qui peuvent en réſulter.

Fig. 2. Les raions qui en traverſant la lentille AB, ſont rompus au foyer rouge *c*, & au violet *d*, forment le moindre eſpace circulaire, dans le point *oo*, où ils ſe coupent; le rapport de ſon diametre eſt, ſelon l'illuſtre Newton, à celui de la lentille, comme 55 ou 250 à 1.

Lorsque l'ouverture de la lentille AB ſera augmentée en *a* & *b*; au point, par exemple, qu'elle ſoit double; le diametre de cet eſpace circulaire augmentera dans la même raiſon.

Si l'ouverture de la lentille AB étoit augmentée en *xx*, au point d'être triple; le diametre de cet eſpace circulaire augmentera encore dans le même rapport.

Mais

Mais, quel que soit le changement dans l'ouverture de la lentille, & celui du cercle lumineux, que forment les raions solaires par rapport à sa grandeur, la partie de l'axe de la lentille *d*, *e*, égale à $\frac{1}{27}$ de son foyer, marque l'espace, par lequel les images colorées, formées & terminées par les raions de l'objet, qui traversent le centre de l'objectif, sont rangées & dispersées, dans un ordre constant & invariable; lorsque la réfraction sphérique ne le trouble pas.

Il en résulte à ce qui me paroit avec toute l'évidence possible, premierement que la grandeur variable de cet espace circulaire, dont la cause ne se trouve pas dans la réfrangibilité seule, mais plus encore dans l'ouverture plus ou moins grande de l'objectif, ne peut pas servir de principe, pour fixer la valeur & le rapport, de la réfrangibilité proportionelle, invariablement aux foyers des lentilles.

Secondement, que cet espace circulaire, que les raions solaires forment dans le foyer d'une lentille, considéré seul, plus ou moins grand, selon son ouverture, ne peut pas être regardé, comme l'image représentée d'un objet, qui transmise à travers plusieurs lentilles dans les lunettes devient celui de la vision.

Mais que c'est la considération des images colorées, rangées & dispersées dans l'axe des lentilles par un espace, qui est à leur foyer 1 à 27; & celle, de l'effet que produit cette dispersion pour la vision, lorsque ces images sont transmises à l'oeil à travers toutes les lentilles qui entrent dans la construction d'une lunette, qui seule peut éclaircir la question; Quelle est l'influence & l'effet de la réfrangibilité?

L'illustre Newton se sert pour les expériences qu'il rapporte, d'une lentille d'un foier peu considérable, dont il ne marque pas l'ouverture; il considere le cercle lumineux formé dans son foyer, comme l'image des raions colorés; & il le suppose formé absolument par les raions, comme diversement réfrangibles, sans avoir égard à la part que l'ouverture doit y avoir nécessairement.

Pour fixer ensuite le cercle lumineux, formé par les raions rompus différemment vers le centre & vers la circonférence, en traversant une lentille sphérique, dont la grandeur doit servir de mesure

pour la confusion, qui en résulte pour la vision; il considère un objectif plano-convexe.

Il me paroit qu'il étoit à propos d'appliquer le calcul à la même lentille, par laquelle il avoit déterminé la grandeur de l'espace réfrangible, pour fixer celle de la confusion sphérique; il étoit naturel de faire l'estime de la grandeur des deux espaces de diffusion, avec la même lentille, pour en faire une comparaison juste & fondée: d'autant plus que la dispersion causée par la diverse réfrangibilité des raions, dépend uniquement de la distance du foyer de la lentille, & reste la même, qu'elle soit plano-convexe, ou que ces deux faces soient également ou inégalement convexes.

Je dois observer encore, que pour le but qu'il se propose, qui est de faire une estime générale de la confusion sphérique, il étoit nécessaire de le faire pour les lentilles sphériques en général, quelque soit le changement & le rapport de leurs faces. La confusion d'une lentille plano-convexe, lorsque sa convexité regarde l'objet, est moindre d'un tiers, de celle d'une lentille également convexe du même foyer & de la même ouverture. Il auroit pu rendre le cas plus avantageux encore, par une lentille inégalement convexe formée de deux faces dont les raions sont comme 2 à 17.

Mais il ne paroit pas, qu'il ait voulu en tirer quelque avantage; au lieu de tourner la face sphérique de la lentille plano-convexe qu'il emploie, vers l'objet comme elle doit l'être, pour jouir de l'avantage quelle procure d'une moindre confusion, il la tourne dans le sens contraire, le côté plan vers l'objet; apparemment pour la commodité du calcul, afin que les raions ne souffrent pas de réfraction sur la premiere face; cas dans lequel on sait, qu'elle produit une confusion 4 fois plus grande, que celle qu'elle eût eu, étant tournée comme elle doit l'être, avec sa face sphérique vers l'objet.

Il suppose le diametre de l'ouverture de 4 pouces, & celui de la face convexe de 100 pieds, ou de 1200 pouces; le foyer de la lentille sera par conséquent de 200 pieds.

On

On fait, qu'avec une distance de foyer pareille, & une si petite ouverture, la confusion de la sphéricité est non seulement insensible pour la sensation, mais qu'elle doit être en effet presque nulle, parce que tous les raions transmis par la lentille, peuvent être considérés comme passans par le centre.

Des suppositions aussi avantageuses, auxquelles il applique le calcul, ne pouvoient pas manquer de lui donner le résultat tel qu'il le souhaitoit; la vision n'est gueres ou point du tout troublée par la figure sphérique, pendant que l'espace de diffusion dans le foyer, ou la distance des images rouges aux violettes, est de près de 7 pieds.

Le diametre du petit cercle ou point lumineux considéré comme formé par la confusion sphérique, n'est que $\frac{961}{72000000}$ parties d'un pouce; pendant que celui que forment les raions dispersés, par la diverse réfrangibilité étant égal à la 55me partie de celui de cette lentille, qui a 200 pieds du foier & 4 pouces d'ouverture, a pour diametre $\frac{4}{55}$ de pouce. Et sur le rapport des diametres de ces deux points lumineux pour cette lentille, il fixe le rapport général de la confusion de la sphéricité, à celle de la diverse réfrangibilité comme $\frac{4}{55}$ à $\frac{961}{72000000}$, ou comme 1 à 5449. p. 124.

Il paroit qu'il a eu des doutes lui-même sur ce rapport, qui n'est admissible, à ce qu'il me paroit, que pour sa lentille plano-convexe, soumise au calcul, de 200 pieds de foyer, & de 4 pouces d'ouverture, ou pour tout autre objectif, dont l'ouverture & le foyer suivroient ce même rapport. Il réduit dans la suite la confusion de la diverse réfrangibilité, en considérant la densité & la rareté de la lumiere, qui forme le point lumineux, dans le foyer des rayons jaunes de la 55me partie du diametre de l'ouverture de l'objectif, à la 250me, pour établir un autre rapport, selon lequel la confusion du point lumineux, dans le foyer des lentilles, au lieu de 5449 fois en général, n'est que 1200 fois plus grande qu'elle ne le seroit, si elle n'étoit grossie que par leur figure sphérique. P. 131.

C'est de ce principe du rapport des plus grandes erreurs de la sphéricité, aux plus grandes de la diverse réfrangibilité, comme

1 à 5449 ou à 1200, dont il se sert, comme d'une démonstration complette, pour établir sa septieme Proposition; Que ce n'est pas la sphéricité des lentilles, mais la diverse réfrangibilité des raions, qui est la véritable cause de l'imperfection des lunettes; & qu'il les condamne pour toujours à rester aussi imparfaites qu'elles le sont. En admettant la comparaison de l'illustre Newton dans toute son étendue, les conséquences qu'il prétend en tirer, en sont-elles plus admissibles & plus justes?

Il ne s'agit pas de considérer la confusion seule ou l'extension du point lumineux, produite dans le foyer même d'une lentille, qui dans le cas qu'il suppose est très grande sans doute; mais d'examiner son effet pour la vision, après avoir joint à l'objectif les oculaires.

Quelle que soit la diffusion causée par la diverse réfrangibilité, la question se reduit à déterminer, s'il est possible, par l'arrangement des oculaires, de rendre son effet insensible dans la représentation de la derniere image, qui fait l'objet immédiat de la vue. Une lunette de 200 pieds, formée de l'objectif de l'illustre Newton, d'une ouverture de 4 pouces & d'un oculaire de 15 pouces, représenteroit très-distinctement, sans aucun effet sensible de confusion, & n'auroit d'autre imperfection, que l'excessive longueur. Après avoir déterminé l'effet de la réfrangibilité, ou l'espace par lequel les images des raions colorés sont dispersées, comme la 27 partie du foyer des lentilles mêmes; il paroit que cette belle découverte auroit du le conduire nécessairement à examiner l'effet de cette multiplicité des images & de leur dispersion seule, ou combinée avec la confusion sphérique, à l'égard de la vision; en considérant la représentation des images dispersées, transmises à l'oeil à travers plusieurs lentilles, qui entrent dans la construction des lunettes.

Il paroit que c'est l'idée de la comparaisonde de deux confusions, qui a fait perdre de vue à cet esprit si pénétrant, les considérations les plus naturelles, & chercher le principe du trouble qu'apporte la réfrangibilité à la vision, dans la grandeur du cercle lumineux, formé dans le foyer d'une lentille, par les raions solaires, & dans son

rapport

rapport avec ſon ouverture; en la conſidérant ſeule, & ſans être combinée avec pluſieurs autres lentilles.

Elle empêche encore de faire attention, qu'en fixant ces rapports, pour les deux lentilles qu'il cite, avec toute la rigueur poſſible, il n'en peut réſulter aucune loi générale pour les deux confuſions, qui peuvent varier à l'infini, avec l'ouverture & le foyer des lentilles.

Selon la véritable loi qu'il a fixée lui-même de la diſperſion des raions colorés, elle ſeroit pour la premiere égale à $\frac{6}{27}$ de pieds, & pour la ſeconde à $7\frac{1}{2}$ pieds, environ comme 1 à 40; mais, en prenant pour principe la grandeur du cercle lumineux de leur foyer, elle ſeroit parfaitement égale, en ſuppoſant leurs ouvertures les mêmes: & la véritable loi ceſſeroit d'avoir lieu.

Cette confuſion conſidérée indépendamment de celle de la ſphéricité, ſera toujours la même, pour les deux lentilles, quelle que ſoit leur ouverture; Elle pourroit être double, triple & quadruple; la diſperſion des images colorées reſteroit toujours la même; pour la premiere égale à $\frac{6}{27}$ de pied, & pour la ſeconde à $7\frac{1}{2}$ pieds: mais elle deviendra infiniment plus ou moins ſenſible, ſelon qu'elle ſera combinée avec une confuſion plus ou moins grande de la ſphéricité dépendante de l'ouverture des lentilles, qui multiplie les images à l'infini & trouble l'ordre de leur repréſentation.

La diſperſion de la réfrangibilité tient aux raions mêmes, & ni l'ordre ni la multiplicité des images qu'ils forment, n'ont le moindre rapport immédiat avec l'ouverture des lentilles; Il eſt d'autant plus ſurprenant qu'il aie pu varier ſur une loi qu'il avoit fixée lui-même comme invariable, que quelle que ſoit la réfraction du raion, la réfrangibilité reſte toujours inaltérable & la même.

La confuſion dépendante de la ſphéricité au contraire, varie à l'infini avec l'ouverture des lentilles. On ſait les bornes étroites dans leſquelles elle eſt renfermée pour les objectifs qu'on n'oſe paſſer, parce que la diſperſion des raions augmente comme le quarré du diametre de l'ouverture, & en conſidérant la repréſentation diſtincte de l'i-

mage, comme le cube du diametre par rapport à la ſenſation. La diſperſion au contraire réelle du point lumineux dans le foier des lentilles eſt le produit de deux confuſions combinées.

Je ne ſaurois me diſpenſer de faire une remarque pour prévénir une mépriſe de laquelle je ſuis fort éloigné de charger l'illuſtre Newton; mais dans laquelle le rapport qu'il établit de la grandeur du cercle lumineux, regardé comme image, avec l'ouverture des objectifs, pourroit faire tomber.

La grandeur des objets & de leurs images en eſt indépendante abſolument; elle dépend à l'égard des lunettes, non ſeulement des raions de l'objet, qui traverſent le centre de l'objectif, & tracent les points correſpondants de l'objet, en peignant l'image & la terminant dans le foyer; mais encore de la maniere que les oculaires la tranſmettent à l'oeil, & forment l'angle de la viſion plus ou moins ouvert.

Une ouverture plus ou moins grande de l'objectif n'y change rien, & les expériences les plus communes de la chambre obſcure prouvent, que ce n'eſt pas l'ouverture, mais la figure des lentilles, qui forme l'image plus ou moins grande. L'ouverture & la diſtance du foier des lentilles contribuent à la former diſtincte ou confuſe, ſelon que l'une & l'autre produiſent la confuſion ſphérique ou celle de la réfrangibilité.

L'illuſtre Newton, après avoir donné une explication de la viſion, appuie ſon ſentiment ſur une ſeconde preuve encore, qu'il déduit du rapport entre l'ouverture, le groſſiſſement & les foiers des lentilles.

P. 131. Il y a un autre argument, dit-il, par où l'on peut s'aſſurer, que la différente réfrangibilité des raions eſt la véritable cauſe de l'imperfection des Téleſcopes.

Car les erreurs des raions qui procedent de la ſphéricité des verres objectifs, ſont comme les cubes des ouvertures des verres objectifs; & ſur ce pied-là, pour que des Téleſcopes de différentes longeurs, groſſiſſent diſtinctement au même degré, les ouvertures des objectifs, & le pouvoir de groſſir les objets, devroient être comme

les

les cubes des racines quarrées de leurs longueurs; ce qui ne s'accorde point avec l'expérience.

Mais les erreurs qui proviennent de la différente réfrangibilité des raions sont comme les ouvertures des objectifs; de sorte qu'afin que des Télescopes de différentes longueurs grossissent distinctement au même degré, leurs ouvertures & leurs pouvoirs de grossir les objets, doivent être comme les racines quarrées de leurs longueurs; ce qui s'accorde avec l'expérience, comme on sçait fort bien. Par exemple, un Télescope de 64 pieds de longueur, & dont l'ouverture est de 2 & $\frac{2}{3}$ de pouces, grossit environ 120 fois aussi distinctement, qu'un Télescope d'un pied de longueur, & dont l'ouverture est de $\frac{1}{3}$ de pouces grossit 15 fois.

Je suis forcé de dire, avec Horace plein d'admiration pour Homere, qu'après avoir produit les plus sublimes merveilles il cherche à se reposer.

Tel paroit le génie de l'illustre Newton lorsqu'il applique sa découverte admirable au point le plus intéressant de la Dioptrique; je crois pouvoir le dire sans manquer à la haute estime que j'ai pour lui, & qu'il mérite à tous égards.

On a les regrets le plus vifs de le voir s'arrêter au millieu de la plus belle carriere.

L'esprit le plus profond, le plus juste, se perd dans des suppositions, qu'il établit comme des principes, pour en tirer des conséquences aussi peu fondées.

Assis sur le thrône de la vérité, il paroit en descendre, pour jouir du droit que reclame la foiblesse humaine pour le gros des hommes; celui de se laisser surprendre trop facilement par les sentimens qui favorisent leurs opinions.

Il n'est occupé qu'à chercher tout ce qui peut rendre vraisemblable un sentiment, pour lequel il est prévenu & qu'il tâche d'établir; celui de la dépendance absolue de la Dioptrique de sa belle découverte. Il me paroit qu'Auguste jaloux de sa grandeur dicte l'arrêt des limites de l'Empire Romain, pour ses successeurs lorsque l'illustre

Newton

Newton fixe les bornes de la Dioptrique, dans lesquelles il prétend enfermer le Géometre.

Cette seconde preuve qu'il tire du rapport du grossissement avec l'ouverture & les foiers des lentilles, ne me paroit pas plus heureuse que la premiere.

Il est démontré de la maniere la plus incontestable, que, suivant les principes de la Théorie, lorsqu'on n'a égard qu'à la confusion de l'ouverture des lentilles objectives; le cube du foier de l'objectif doit être proportionel au quarré quarré du grossissement & de l'ouverture. Pour obtenir, par exemple, une lunette qui grossit 8 fois davantage qu'une autre donnée, la distance du foyer de l'objectif doit être 16 fois plus grande que celle de la premiere. Je remarque d'abord, que l'illustre Newton ne s'explique pas bien, ou qu'il y a une faute d'impression, lorsqu'il énonce ce principe de la Théorie de la maniere suivante; le grossissement & l'ouverture des objectifs doivent être comme les cubes des racines quarrées de leurs foyers *): c'est comme les cubes des racines quarrées quarrées. Il prétend que ce principe est contraire à l'expérience, qui établit pour regle que le grossissement & l'ouverture des objectifs doivent être comme les racines quarrées de leurs foyers. Si un objectif d'un pied de foyer & de $\frac{1}{3}$ de pouce d'ouverture, grossit 15 fois; un autre de 64 pieds de foyer & de $2\frac{2}{3}$ de pouces d'ouverture, grossira 120 fois, qui est le quarré de 15, aussi distinctement. Le célebre Huyghens à établi ce principe, suivi avec assez de succès dans la pratique, que le foyer de l'objectif doit être comme le quarré de la multiplication. Pour grossir, par exemple, 8 fois davantage, le foyer de l'objectif doit être comme 64, ou 8 fois 8.

Mais ce principe n'a d'autre fondement que celui de la difficulté de travailler, avec la même précision, les lentilles d'un foyer éloigné que celles d'un foyer qui l'est peu.

Si deux objectifs, l'un de 10 pieds de foyer, & l'autre de 160 pieds, sont également bien exécutés, le dernier grossira 8 fois davan-

*) *Apperturæ & potentiæ amplificandi debent esse ut ipsæ radices quadratæ longitudinum.*

vantage que le premier, avec le même degré de distinction; mais la difficulté de l'exécution, oblige ordinairement d'emploier, pour obtenir un grossissement 8 fois plus grand, un objectif dont la distance de foyer s'étend au delà de 16 fois. Mais la maladresse de l'artiste ne prouve rien, & ne forme pas un principe d'expérience, pour renverser la Théorie.

L'expérience journaliere, au contraire, fait voir souvent qu'une lunette de 8 pieds, exécutée par un habile ouvrier, grossit autant qu'une autre de 12 pieds, faite par un autre qui ne l'est pas; & que ce même cas peut arriver pour le même artiste, qui malgré toute son attention ne réussira pas également bien. Je crois par conséquent pouvoir soutenir sans balancer, que c'est à tort que l'illustre Newton fonde ce principe sur l'expérience, & plus encore sur la différente réfrangibilité; qui, comme une raison pour l'allongement des lunettes, me paroit impliquer la plus grande contradiction. Seroit-ce en allongeant la distance du foyer de l'objectif, que l'effet de la différente réfrangibilité deviendroit moins sensible? Le contraire doit arriver selon la Théorie de l'illustre Newton même. Une plus grande distance de foyer doit entrainer nécessairement une plus grande dispersion dans les images.

Je remarquerai en général, que le rapport de l'ouverture des objectifs avec le grossissement n'est pas fondée directement dans la confusion sphérique, comme l'illustre Newton paroit l'insinuer; mais sur la quantité de lumiere qu'ils transmettent, nécessaire pour obtenir une image assez éclairée. Cette lumiere que les objectifs transmettent, est comme le quarré du diametre de leur ouverture; & ce rapport établit celui de l'ouverture avec le grossissement, quelle que soit la longueur de la lunette. Pour avoir une double, triple, ou quadruple multiplication, avec une représentation également éclairée, il est indispensable que le diametre de l'ouverture de l'objectif augmente en raison des quarrés du grossissement comme 4, 9, 16 &c.

Les rapports au contraire du grossissement rélatif au foyer n'est pas en raison de leurs racines quarrées, mais comme les cubes de leurs ra-

racines quarrées quarrées; les foyers, ou longueurs, suivent la raison des racines cubiques, des racines quarrées quarrées du grossissement.

La dispersion du foyer des objectifs, soit qu'elle vienne de la réfrangibilité ou de la figure sphérique, n'a aucun rapport immédiat avec le grossissement, qui dépend uniquement de l'angle de la vision; mais la premiere, rélative aux foyers des lentilles, met des bornes à la longueur des lunettes, & la seconde rélative à leur ouverture, en met à celle des objectifs & à la clarté qu'il faut obtenir.

Ces rapports que l'illustre Newton adopte, ne prouvent que les efforts qu'il fait, pour établir un rapport absolu entre la dispersion de la réfrangibilité & celle de la figure sphérique, pour porter l'une à l'excès & réduire l'autre à rien, pendant qu'elles dépendent de principes tout différents, & peuvent varier à l'infini. Une lentille d'un foyer infiniment éloigné & d'une ouverture infiniment petite auroit la dispersion de la réfrangibilité infiniment grande, pendant que celle de la sphéricité seroit égale a zéro.

Une autre d'un foyer infiniment court & d'une ouverture infiniment grande, auroit l'une & l'autre dispersion dans une raison contraire.

Et une troisieme qui seroit d'un foier infiniment éloigné & qui auroit l'ouverture de même, auroit l'une & l'autre dispersion égales & infinies.

L'illustre Newton fixe sur la comparaison de deux lentilles le rapport de la réfrangibilité à la confusion sphérique comme 5449 à 1; il seroit facile de comparer deux lentilles qui établiroient un rapport précisement opposé, comme 1 à 5449; mais l'exemple de ce Grand-Homme doit servir de leçon pour ne pas se perdre dans des comparaisons qui n'expliquent rien, & ne décident de rien.

On compareroit éternellement deux pieces d'or, pour fixer leur poids & leur grandeur rélative; & on resteroit dans la plus profonde ignorance sur les propriétés de l'or qui le constituent & le distinguent des autres métaux. Il paroit que le géometre & le calculateur habitué à rapporter des grandeurs & des quantités, en a imposé au philosophe, qui remonte aux causes & aux principes.

Ce

Ce n'eſt que dans la repréſentation même des objets, & de leurs images à travers pluſieurs lentilles qu'on doit chercher le principe de la perfection, dont les lunettes ſont ſuſceptibles.

Je veus l'expoſer en peu de mots, tel que je l'enviſage & qu'il eſt appuié ſur les obſervations que j'ai pu faire avec des lentilles différentes en ouverture & en foier, dans la conſtruction des lunettes mêmes.

Les raions n'étant pas d'une même réfrangibilité, ſont rompus différemment en traverſant les objectifs; & les images qu'ils forment, diſperſées par un eſpace déterminé, produiſent la ſenſation de la vue, où conſiſtent l'objet immédiat de la viſion.

Ces images formées par les ſept raions colorés, peuvent être conſidérées comme autant de tableaux rangés les uns devant les autres dans l'axe de la lunette.

L'image rouge étant la plus éloignée de l'objectif, ou la plus proche de l'oeil, cacheroit, ſi elle avoit aſſez de corps ou d'opacité, les images des autres raions, & ſeroit la ſeule que l'oeil verroit alors, qui dans ce cas ne recevroit que la ſeptieme partie des raions de la lumiere & verroit néceſſairement tout en rouge.

Mais la ſubtilité infinie de la lumiere eſt telle, l'expérience en fait la preuve, que nous voions l'image des raions ſolaires avec la couleur qui réſulte du mêlange de tous les raions, & les objets à travers les lunettes, avec les mêmes couleurs qu'ils ont à la ſimple vue.

L'oeil n'apperçoit qu'une ſeule image avec la couleur naturelle de l'objet, lorsque les images rangées dans l'axe de la lunette lui ſont repréſentées ſous un même angle, & confondues à ſon égard dans une ſeule.

Il eſt par conſéquent néceſſaire que l'objectif, quelle que ſoit ſa figure & ſon ouverture, rompe tous les raions, qu'ils paſſent au centre ou à la circonférence, préciſément de même, afin qu'ils puiſſent former exactement dans l'ordre des ſept couleurs, dans l'axe de la lunette, leurs diverſes images. Lorsque les raions ſubiſſent en traverſant l'objectif une réfraction différente, comme il arrive avec les lentilles ſphé

 riques,

riques, que ceux qui passent à la circonférence, s'unissent plus près de l'objectif avec l'axe, & les autres plus loin, à mesure qu'ils passent plus près du centre; ils ne formeront plus une seule rangée d'images dans l'ordre des sept couleurs; mais une infinité de petites rangées de sept tableaux diversement colorés. Tant que ces images ne sont qu'à une distance imperceptible pour l'oeil, qui, placé dans l'axe de la lunette, ne les apperçoit que dans une même file, sous un même angle, elles ne seront à cet égard qu'une seule & unique image, & la vision sera nette & distincte; c'est le cas des objectifs sphériques d'une juste ouverture, qui rompent les raions du centre à la circonférence à peu près de même. Mais, lorsque par une dispersion des raions du centre & de la circonférence, la distance entre les images & leur multiplicité devient trop grande. Celles des foyers les plus près de la lentille, se sépareront & divergeront, plutôt que celles des foyers les plus proches de l'oeil; elles passeront & se répandront sur les bords de celles-ci; les couleurs propres des objets disparoitront, & l'oeil ne verra qu'une image vague, troublée, confuse & formée d'un mêlange en désordre de toutes les couleurs.

C'est le cas des objectifs sphériques, qui par une trop grande ouverture produisent une trop grande dispersion des raions.

Le seul moyen de faire disparoitre les couleurs & de rendre la représentation nette & distincte, en couvrant la lentille d'un cercle de carton de la circonférence au centre, pour ne lui laisser que l'ouverture à laquelle la dispersion n'est plus sensible, offre une expérience démonstrative de la vision, que je viens d'exposer & de la véritable théorie de la représentation des objets par les lunettes.

Il en résulte, je crois, incontestablement que les Géometres n'ont pas eu tort, de regarder la confusion de la sphéricité comme la véritable cause de l'imperfection des lunettes, par les bornes étroites dans lesquelles elle resserre l'ouverture des objectifs; que sa correction est un des points les plus importants de la Dioptrique; que l'illustre Newton a eu tort d'en détourner l'attention du Géometre; & que la diverse réfrangibilité des raions, n'est pas si dangereuse

gereuse qu'il le prétend; elle le devient par le concours de la confusion de la sphéricité; & elle cesse de l'être lorsque celle-ci n'est plus, parce qu'elle trouve le remede dans la réfraction des raions formateurs des images, qui, réunis dans un seul, ne représentent qu'une seule image nette & distincte à l'oeil placé dans le point où ils coupent l'axe de la lunette.

L'expérience journaliere dans la construction des lunettes auroit du faire soupçonner un principe existant dans la juste ouverture de l'objectif & dans le nombre, l'ouverture & l'arrangement des oculaires, qui faisoit disparoitre l'effet de la réfrangibilité, en faisant obtenir des lunettes non seulement plus ou moins sujettes aux couleurs, mais dont la représentation étoit nette & distincte absolument.

Un de nos Opticiens, Zahn, dans son Oeil artificiel, n'a pas manqué de saisir, les véritables principes, dont dépend la perfection des lunettes; il parle de la combinaison d'une lentille concave avec une convexe pour obtenir un objectif exemt de la confusion sphérique, & il ne laisse pas de considérer la route des raions formateurs des images qui en coupant l'axe de la lunette, fixe le point où l'oeil n'apperçoit qu'une seule image sans couleurs, & découvre le champ plus avantageux sous l'angle le plus ouvert & le plus favorable pour la multiplication.

Mais la décision de l'illustre Newton étoit suffisante pour arrêter, pendant plus d'un demi-siecle, toute recherche sur le sujet le plus intéressant de la Dioptrique.

Les erreurs d'Aristote, ou plutôt des mots scientifiques vuides de sens, ont enchainé l'esprit humain pendant près de deux mille ans, sans que personne aie profité des choses admirables que ses ouvrages renfermoient.

Il falloit un homme d'un génie éclairé au dessus de l'autorité pour rappeller la vérité sur ce point. M. Euler l'a fait heureusement. Il fit connoitre d'abord par un Mémoire inseré dans le troisieme Tome

du Recueil de l'Académie, la véritable loi de la réfrangibilité, de former des objectifs exemts de la dispersion des raions colorés, dans la réfraction même que le raion subit en traversant divers milieux réfringents.

Il fut attaqué par le célébre M. Dollond, qui soutint l'hypothese de Newton & la conséquence qu'il en tire dans son Traité d'optique, p. 133. énoncée de la maniere suivante. „A cause de cette différente réfrangibilité, je ne vois point encore qu'on puisse par le seul secours des réfractions autrement perfectionner les Télescopes, qu'en „augmentant leur longueur."

J'ai eu l'honneur de rendre compte à l'Académie de cette dispute en établissant le véritable état de la question.

La théorie & l'expérience aiant fait voir, que les lunettes tiroient peu ou point d'utilité de ces objectifs exemts des erreurs de la réfrangibilité, M. Euler rendit publics deux Mémoires insérés dans le XIII Tome du Recueil de l'Académie, dans lesquels il tâche de développer les principes véritables par lesquels les lunettes & microscopes peuvent obtenir le degré de perfection, dont ces merveilleux Instrumens sont susceptibles, en déterminant, par une application heureuse de l'analyse, les images que forment les raions colorés en traversant plusieurs lentilles.

Ils sont renfermés dans les formules générales qu'il rapporte, & qui sont le résultat d'un calcul très épineux & prolixe, qui en forme la démonstration. Il eut été à souhaiter que les bornes d'un Mémoire lui eussent permis de l'exposer dans tout le détail de même que l'application de ces formules générales à tous les cas particuliers. Je ne m'arrête ici qu'à la partie qui fait le sujet de ce Mémoire, ou de la septieme proposition de Newton; Que la réfrangibilité est la cause de l'imperfection des lunettes. Comme la représentation du champ plus ou moins grand qu'une lunette découvre, & le grossissement plus ou moins avantageux, dépendent de même que la diverse réfrangibilité, de la maniere dont les raions terminateurs & formateurs des images parviennent à travers les lentil-

les

les sous l'angle le plus favorable à l'oeil, dont le lieu ou la distance de l'oculaire se trouve par là également déterminé; je dois en développer auparavant les principes, pour l'application du calcul, à des matieres liés nécessairement par la dépendance d'un même principe.

Les lunettes & les microscopes découvrent une espace circulaire, qu'on appelle leur champ apparent, & qu'on mesure par son demi-diametre.

Pour les lunettes on l'exprime par degrés & minutes pour mesurer l'arc du ciel que le champ apparent renferme. Pour les microscopes on mesure la partie de l'objet qu'on découvre, en exprimant son demi-diametre en pouces & lignes.

L'une & l'autre maniere sont dans le fond les mêmes, en supposant la distance de l'objet $= A$, & le demi-diametre de l'espace circulaire auquel s'étend la vue $= B$: la quantité B est le demi-diametre du champ apparent pour les microscopes, & la fraction $\frac{B}{A}$ l'exprime pour les lunettes.

Le lieu de l'oeil pour découvrir le champ apparent est ce point dans l'axe de la lunette, dans lequel les raions terminateurs ou formateurs de l'image de l'objet, après les réfractions qu'ils ont subies en traversant toutes les lentilles, coupent leur axe commun.

L'oeil verra un moindre espace s'il quitte ce point, ou lorsque les raions de toute l'étendue du champ ne lui sont pas transmis par les oculaires, mal disposés, ou d'une trop petite ouverture pour recevoir les raions, & les ramener à la direction qui les fait parvenir à l'oeil, n'étant pas limité par une seule lentille: le cas le plus simple est celui de deux lentilles ou des lunettes astronomiques, qu'il suffira ici de considérer.

La considération de la représentation des objets à travers les lunettes mettra ces principes dans tout leur jour.

Cha-

Fig. 3. Chaque point de l'image C*xy*, représenté par l'objet A*xy*, éloigné à l'infini & transmis par la lentille *b*B*b*, qui la représente dans son foyer C, est formé par les raions qui partent du point correspondant de l'objet même, en traversant l'objectif *b*B*b*. Ces raions formateurs de l'image, continueroient la route de leur direction divergente, s'il ne rencontroient une seconde lentille *d*D*xy*, placée à la distance CD, égale à celle de son foier, qui les ramene à l'axe en *o*.

Les angles D*ox*, & D*oy*, seront les angles visuels, sous lesquels l'oeil placé en *o* verra les objets A*x* & A*y*, considérées comme des objets différens, ou comme parties d'un même objet. Il est évident, que le raion de l'objet A*y*, deux fois plus grand que celui de A*x*, coupera l'axe de la vision au centre de la premiere lentille, ou de l'objectif *b*B*b*, sous un angle double de celui de l'objet A*x*; que les images C*y* & C*x*, aussi bien que les angles visuels, seront dans le même rapport; & que l'ouverture de la seconde lentille *d*D*xy*, doit suivre ce même rapport, si les raions *x*B*x*, & *y*B*y*, doivent la rencontrer pour être amenés au point de l'axe *o*.

Si A*x* & A*y* ne représentent pas des objets terminés, ils représenteront les demi-diametres de l'espace circulaire, ou du champ apparent, que l'oeil placé en *o* découvrira à travers les deux lentilles; & l'espace circulaire formé par le demi-diametre A*y*, double de celui de A*x*, & vu sous l'angle visuel D*oy*, double de celui de D*ox*, sera 4 fois plus grand, que celui qui sera formé par le demi-diametre A*x*.

Le raion ZZZ étendroit le demi-diametre du champ apparent A*xy*, jusqu'en Z, & transmettroit l'image formée *xyz*, si trop divergent il ne passoit pas hors des limites de l'oculaire *d*D*xy*; il seroit par conséquent nécessaire d'étendre l'ouverture de l'oculaire jusqu'à la rencontre du raion en Z, pour lui faire subir la réfraction qui le ramene, au point *o*, à l'oeil; ou de soumettre le raion dans sa route à des réfractions qui le ramenent à l'oculaire, pour être dispensé d'augmenter son ouverture.

C'est

C'eſt le cas des lunettes, ſi l'on vouloit emploier des oculaires d'une ouverture exceſſive; leurs foyers ſeroient auſſi éloignés que ceux de l'objectif, & l'on n'auroit point de groſſiſſement. L'emploi de lentilles intermediaires collectives, qui font ſubir aux raions trop divergents, des réfractions convergentes, dans leur route, & les ramenent à la rencontre de l'oculaire, offre non ſeulement un remede à cet inconvénient: ces lentilles augmentent encore la multiplication, en conduiſant les raions de maniere que la derniere réfraction qu'ils ſubiſſent, en traverſant l'oculaire, les ramene plutôt à l'axe, rapproche le lieu de l'oeil, & forme l'angle viſuel plus ouvert. Une lentille d'un foyer déterminé, placée par exemple dans le lieu de l'image, dans la rencontre des foyers des deux lentilles, qui romproit les raions divergents, Z, vers un point de l'axe, dont la diſtance eſt égale, au produit du foyer de l'objectif, & du ſien, diviſés par leur différence, le rameneroit vers le point *y*, de l'oculaire; & la nouvelle réfraction qu'il y ſubit, le romproit plus près de l'oculaire, en M, à la moitié de la diſtance D*o*; le demi-diametre du champ apparent ſeroit augmenté de la diſtance *y*Z, & l'angle viſuel nouveau D*my*, plus ouvert ou plus grand, que le premier D*oy*, augmenteroit dans la même raiſon le groſſiſſement, parce que les objets ſont groſſis autant de fois que D*oy*, ou D*my*, ſont plus grands que l'angle AB*y*. Il en réſulte que le lieu de l'oeil, le champ, & le groſſiſſement plus ou moins avantageux, ſont liés néceſſairement, & dépendent des mêmes principes du foyer & de l'ouverture de l'oculaire, & des lentilles intermédiaires qu'on emploie pour conduire les raions par des réfractions avantageuſes à l'oeil.

L'application du calcul développera abſolument ce cas, & ſervira de méthode pour les cas plus compliqués de plus de lentilles; voici le probleme.

La lunette étant formée de deux lentilles PP & QQ, rangées ſur le même axe EO; trouver le champ apparent & le lieu de l'oeil *o*. Fig. 4.

Soit le demi-diametre de l'eſpace viſible E*e* = *e*, l'image repréſentée dans le foier de l'objectif ſera F*f*.

Le

Le foier de l'objectif PP — — — — $= p$,
celui de l'oculaire QQ — — — — $= q$,
la distance de l'objet EA infinie $= a$,
la distance de l'image Ff du foier $= \alpha$,
celle de l'image à la seconde lentille FB $= b = q$,
celle de l'oeil BO — — — — — $= k$.

$$p \text{ sera } = \frac{a\alpha}{a - \alpha}, \quad \& \ Ff = \frac{\alpha e}{a}.$$

Ces quantités déterminées font voir d'abord, que l'ouverture de l'objectif PP ne contribue rien au champ apparent; il ne s'étend qu'au point e, qui est l'extreme de ceux qu'on peut appercevoir, par les raions qui traversent le centre de l'objectif; & l'oeil n'a la vision de la grandeur terminée de l'objet, que par ces raions terminateurs, correspondants, qui forment l'image Ff.

On peut regarder par conséquent l'ouverture de l'objectif PP, comme infiniment petite; & celle de l'oculaire QQ, étant dépendante de son foyer, son demi-diametre exprimé par θq, sera $= \theta b$.

Le raion qui passe du point e, par le centre A, de l'objectif, rencontrera l'oculaire en Q, de sorte que $a : e = \alpha + b : BQ$; & $BQ = \left(\frac{\alpha + b}{a}\right) e$.

Mais, si c'est le point extreme de l'objet qui puisse être vu; BQ sera égal au demi-diametre de l'ouverture de l'oculaire QQ, qui est $= \theta b$, & par conséquent le demi-diametre du champ apparent e, sera $= \frac{\theta a b}{\alpha + b}$, & $\frac{e}{a} = \frac{\theta b}{\alpha + b}$.

Après avoir fixé les limites du champ apparent, il sera aisé de déterminer le lieu de l'oeil pour le découvrir. L'oculaire QQ représentera le point extreme e, de l'objet, dans la direction de la droite Bf, à une distance infinie; & le raion qui le transmet, en passant par l'oculaire

re au point Q, où il eſt rompu, rencontre l'axe en o, dans une direction parallele à la droite Bf; de ſorte que $Ff: BF = BQ: BO$; dont réſulte $BO = BQ\left(\frac{ab}{ae}\right) = \left(\frac{a+b}{a}\right)b$. C'eſt à dire que l'oeil, pour recevoir le raion du point extreme e, de l'objet, ou pour découvrir tout le champ apparent, doit être placé dans l'axe de l'oculaire BO, au point o; & ſa diſtance de l'oculaire QQ ſera

$$BO = K = \left(\frac{a+b}{a}\right)b, \quad \text{ou} \quad \frac{K}{b} = \frac{a+b}{a}.$$

Après avoir développé les principes généraux ſur lesquels les oculaires de lunettes doivent être arrangés, je tâcherai d'expoſer le point qui regarde la diverſe réfrangibilité dans ſa plus grande ſimplicité, dépouillé, autant qu'il eſt poſſible, du calcul, dont je me contenterai de marquer la marche & la ſuite qui mene à la ſolution du Probleme.

Je crois que l'idée juſte de la viſion à travers les lunettes, que j'ai tâché de développer, la détermine de la maniere ſuivante.

Lorsque l'objectif d'une lunette eſt abſolument exemt de la confuſion qui réſulte de la ſphéricité, ou au point que cette confuſion ne ſoit pas ſenſible pour l'oeil; l'arrangement convenable des oculaires, & la réfraction que ſubiſſent les raions en les traverſant, remédient à la diſperſion des raions colorés, & préſentent à l'oeil placé dans un point déterminé de l'axe de la lunette, l'image de l'objet nette, diſtincte & ſans couleurs. Les images colorées, formées par les ſept raions diverſement réfrangibles d'un objet, ou point lumineux, dont les raions traverſent un nombre de lentilles quelconque, ſeront rangées par un eſpace déterminé ſur une ligne droite, qui eſt l'axe commun des lentilles. Si l'oeil ſe trouve placé dans la continuation de cette même ligne, dans le point ou il apperçoit ces images ſous un même angle, il ne verra qu'un ſeul point, dans lequel toutes les images colorées lui ſeront repréſentées comme réunies, & l'effet de cette réunion ſera la repréſentation naturelle & diſtincte de l'objet ou du point lumineux.

 Lors-

Lorsque l'ordre troublé des images colorées, & multipliées à l'excés, sera dispersé hors de la direction de l'axe, par la sphéricité & l'ouverture des lentilles; ou que l'oeil placé hors de la direction de la droite, apperçoit cette file d'images de biais; il verra dans le premier cas, une image confuse, enveloppée de couleurs, & dans le second une base colorée, d'autant plus longue que la direction de l'oeil sera différente de celle des images. Je développerai le cas d'une seule lentille, & le probleme seroit; Fixer le lieu de l'oeil lorsqu'il regarde un Fig. 5. objet à travers une seule lentille pour le voir sans aucune confusion de couleurs.

Soit l'objet Ee = — — — — = e,
la distance de la lentille EA — — — = a,
le foier de la lentille, qui répond aux raions moiens — = p,
la distance de l'image AF — — — = α,
soit le lieu de l'oeil qu'on cherche — — = θ,
la distance derriere la lentille Aθ — — = k,

$$p \text{ sera} = \frac{a\alpha}{a+\alpha}, \quad \text{ou} \quad \frac{1}{p} = \frac{1}{a} \times \frac{1}{\alpha};$$

& l'image Ff — — — — — = αe.

Comme OF est $= k - \alpha$, l'oeil verra l'image de l'objet du point e, dans la droite of, par le raion terminateur ou formateur de l'image efo, qui forme avec l'axe de la lentille l'angle Fof, dont la tangente est $= \frac{\alpha e}{a(k - \alpha)}$; en supposant que ce point soit l'image des raions moiens.

Cet angle doit rester le même malgré le changement que peuvent produire dans le foyer p, les raions extremes rouges & violets, en l'augmentant ou le diminuant.

Dans le cas présent en faisant varier la quantité p, la distance α varie aussi; mais, comme la distance a est invariable, la quantité

α

$\frac{\alpha}{a(k - \alpha)}$, ou sa renversée $\frac{ak}{\alpha} -$ restera la même; dont s'ensuit

$\frac{akd\alpha}{\alpha\alpha} = 0$, & par conséquent $k = 0$, ou zéro.

Le lieu de l'oeil pour ne pas sentir l'effet de la diverse réfrangibilité, sera immédiatement derriere la lentille.

Pour appliquer l'analyse aux cas plus compliqués de plusieurs lentilles, la premiere considération qui se présente, c'est celle de la distance du foyer de chaque lentille, comme une quantité variable, par les divers foyers que forment les raions colorés.

Ces variations étant proportionelles à la distance du foyer des raions moiens qui est celui de la lentille, il sera aisé, lorsqu'on le connoit, de déterminer les variations, ou les foyers des raions extremes qui subissent une plus grande ou moindre réfraction.

Si le foyer des raions moiens, ou d'une lentille, est $= p$, & celui des raions extremes $= s$; celui des rouges sera $= p + \frac{1}{ss}p$, & celui des violets $= p - \frac{1}{ss}p$;

Pour appliquer la haute analyse, la petitesse de cette différence de $\frac{1}{ss}p$, peut la faire considérer comme la différentielle de p & dp, & sera par conséquent $= \lambda p$, en exprimant la fraction $\frac{1}{ss}$ par le caractere λ qui peut être positif & négatif. Le nombre, la distance des lentilles & celle de leurs images, étant fixés; M. Euler développe leurs expressions & celle du changement que produit la variabilité de la réfraction dans le lieu & la grandeur de la derniere image L l, qui forme l'objet immédiat de la vision. Fig. 6.

 Ayant

Ayant déterminé ces valeurs différentielles, en donnant à la lettre λ toutes les valeurs comprises entre les limites $+\frac{1}{ss}$, & $-\frac{1}{ss}$; les images des divers raions, seront dispersées des deux côtés de l'image moienne sur l'espace LL, qui se trouve en posant $\lambda = \frac{2}{ss}$ dans l'expression de dE.

Toutes ces images étant terminées par la droite bl, qui, prolongée, coupera l'axe des lentilles sous un angle dont la tangente étant déterminée, fixe ce point $= \Omega$, & la distance $L\Omega$.

La solution parfaite du probleme seroit de réunir les images rangées à la distance LL dans une seule, c'est à dire que dE & $\frac{dV}{V}$ devint égal à zero.

La distance infinie ou assez éloignée de l'image, qu'exigent une bonne vue & les presbytes, rend cette solution impossible, l'espace LL qu'occupent les images, ni son rapport à la distance entiere $EL = E$, ne sauroient être réduits à zero; dE étant $= \infty$, & par conséquent $\lambda(E + SEE) = \lambda E\left(\frac{1 + SE}{ee}\right)$; la quantité S positive, & plus grande que la distance des deux dernieres lentilles $\delta + \epsilon$, devroit être $= 0$, ce qui est impossible; & les quantités dE, $\frac{dE}{E}$, & $\lambda\left(\frac{1 + SE}{ee}\right)$ ne sauroient le devenir par conséquent non plus.

La solution parfaite du probleme seroit possible pour les yeux absolument Myopes, qui peut-être n'existent pas, dont la vue donne la quantité E négative; $E = Ee$ donne $e = -SE$, ou $E = -SEE$, & la quantité $\frac{dV}{V}$ de même $= 0$.

Cette

Cette ſolution pourroit avoir lieu, auſſitôt que la lunette eſt formée de plus de deux lentilles; mais le développement de trois, fait voir déjà que, pour être exemtes abſolument de toute confuſion, elles auroient d'autres défauts; qu'elles groſſiroient peu, n'auroient point de champ, & ſeroient très longues.

Mais le probleme admet une ſolution non moins avantageuſe; l'oeil placé dans le point Ω où le raion terminateur des images coupe l'axe, verra toutes les images terminées par le raion $/A/$, repréſentées comme réunies dans une ſeule, & ne ſentira par conſéquent aucune confuſion. Pour fixer ce point, il faut avoir égard outre cela, que l'oeil ſoit placé de maniere, que cet angle viſuel lui faſſe découvrir le champ apparent, le plus grand, avec une augmentation avantageuſe de la multiplication. Fig. 7.

En conſervant les mêmes dénominateurs précédents pour les foyers des lentilles; l'angle viſuel de l'objet duquel dépend le champ apparent $oAo = \frac{o}{a}$, marque la partie vue de l'objet $oo = \Phi$, donne les expreſſion des images, & détermine l'ouverture des lentilles néceſſaire pour faire venir à l'oeil le raion viſuel; points qui forment les éléments du calcul.

L'ouverture des oculaires aiant un rapport fixé, par la courbure de leurs faces ſphériques avec leurs foyers, qui pour les lentilles également convexes peut être $\frac{1}{2}$ ou $\frac{1}{4}$ de foyer même, & doit être moindre pour celles dont les faces ſont inégales; l'introduction des caracteres $\pi' \pi'' \pi'''$, qui expriment ces fractions, à la place des lettres qui repréſentoient l'ouverture de chaque lentille, rend le calcul plus aiſé & conduit, au lieu des expreſſions compliquées & embarraſſantes, aux formules ſimples & claires que M. Euler rapporte.

Le groſſiſſement égal à la multiplication de l'angle $oAo = \Phi$, produite par l'angle viſuel $E\omega\tau$, étant $= m$, qui aura une valeur négative lorsque la repréſentation ſera renverſée, donne les formules ſuivantes ſelon le nombre des lentilles, qui forment la lunette.

I)

I) *Pour deux lentilles.*

1) La multiplication sera $\pi - \Phi = - m\Phi$.

2) & par conséquent le champ apparent $\Phi = \frac{-\pi}{m - 1}$.

3) La distance de l'oeil à l'oculaire

$$Bq = \frac{\mathfrak{B} b \pi}{\pi - \Phi} = \frac{-\mathfrak{B} b \pi}{m\Phi}, \quad \text{ou } Bq = \frac{-A\mathfrak{B} a \pi}{m(\mathfrak{B}\pi - \Phi)}.$$

4) Pour rendre insensible la diverse réfrangibilité, il faut rendre

$$\frac{\pi}{\mathfrak{B}\pi - \Phi} = 0.$$

II) *Pour 3 lentilles.*

1) La multiplication sera $\pi' - \pi + \Phi = m\Phi$.

2) Le champ apparent $\Phi = \frac{\pi' - \pi}{m - 1}$.

3) La distance de l'oeil

$$Cr = \frac{\mathfrak{B} c \pi'}{\pi' - \pi + \Phi} = \frac{\mathfrak{B} c \pi'}{m\Phi} = Cr = \frac{AB\mathfrak{B} a \pi'}{m(\mathfrak{B}\pi' - \pi + \Phi)}.$$

4) Pour rendre insensible la diverse réfrangibilité, il faut rendre

$$\frac{\pi}{\mathfrak{B}\pi - \Phi} + \frac{\pi'}{\mathfrak{B}\pi' - \pi + \Phi} = 0.$$

III) *Pour 4 lentilles.*

1) La multiplication sera $\pi'' - \pi' + \pi - \Phi = m\Phi$.

2) Le champ apparent $\Phi = \frac{-\pi'' + \pi' - \pi}{m - 1}$.

3) La distance de l'oeil

$$Ds = \frac{\mathfrak{D} A \pi''}{\pi'' - \pi' + \pi - \Phi} = \frac{-\mathfrak{D} A \pi''}{m\Phi} = \frac{-ABC\mathfrak{D} a \pi''}{m(\mathfrak{D}\pi'' - \pi' + \pi - \Phi)}.$$

4)

4) Pour rendre insensible la diverse réfrangibilité, il faut rendre

$$\frac{\pi}{\mathfrak{B}\pi - \Phi} + \frac{\pi'}{\mathfrak{C}\pi' - \pi + \Phi} + \frac{\pi}{\mathfrak{D}\pi'' - \pi' + \pi - \Phi} = 0.$$

IV) *Pour 5 lentilles.*

1) La multiplication sera $\pi''' - \pi'' + \pi' - \pi + \Phi = + m\Phi$.

2) Le champ apparent $\Phi = \frac{\pi''' - \pi'' - \pi' - \pi}{m - 1}$.

3) La distance de l'oeil à l'oculaire

$$Et = \frac{\mathfrak{E}e\pi'''}{m\Phi} = \frac{ABCD\mathfrak{E}a\pi'''}{m(\mathfrak{E}\pi''' - \pi'' + \pi' - \pi + \Phi)}.$$

4) Pour rendre insensible la diverse réfrangibilité, il faut rendre;

$$\frac{\pi}{\mathfrak{E}\pi\Phi} + \frac{\pi'}{\mathfrak{B}\pi' - \pi + \Phi} + \frac{\pi''}{\mathfrak{D}\pi'' - \pi' + \pi - \Phi} + \frac{\pi'''}{\mathfrak{E}\pi''' - \pi'' + \pi' - \pi + \Phi} = 0.$$

Le Mémoire cité de M. Euler, dans lequel ces formules, en y faisant entrer celles qui déterminent la clarté nécessaire, &c. sont appliquées aux cas de plus de lentilles, dispense de les continuer ici.

1) Il résulte de ce calcul, que, pour le même grossissement, l'effet de la réfrangibilité peut varier à l'infini, selon le nombre & l'arrangement des lentilles.

2) Que pour les myopes il seroit possible, en réunissant toutes les images dans la derniere, qui forme l'objet de la vision, de la former aussi nette & distincte que si elle étoit représentée par un miroir.

3) Que ce n'est pas la réfrangibilité, mais la sphéricité & l'ouverture des lentilles, qui sont la cause de l'imperfection des lunettes.

4) Que leur perfection dépend d'un objectif exemt absolument de la confusion de la sphéricité, dont l'ouverture sans bornes n'en met plus à la clarté & à la multiplication.

5) Que la diverse réfrangibilité n'est alors pas à craindre.
6) Qu'elle trouve le remede dans l'arrangement des oculaires, qui doit être tel qu'en même tems ils procurent
7) le champ apparent le plus grand & la multiplication la plus avantageuse, par leur nombre, la disposition & l'ouverture des oculaires.

L'illustre Newton, après avoir fait voir l'effet étrange de la réfrangibilité, tâche de repondre à l'objection qu'il se fait à lui même.
P. 125. Si les erreurs causées par la différente réfrangibilité des raions, sont si considérables; j'ajouterai, & d'autant plus grandes que les lunettes sont longues; d'où vient, direz-vous, que les objets paroissent si distinctement au travers des Télescopes, & j'ajouterai encore; d'où vient qu'on trouve pourtant de bonnes lunettes, qui ne font absolument pas remarquer ce défaut. C'est parce que *) les raions errans répond-il, bien loin d'être dispersés uniformement sur tout cet espace circulaire, sont rassemblés d'une maniere infiniment plus dense dans le centre, que dans une autre partie du cercle; & parce que, du centre à la circonférence, ils deviennent toujours plus rares jusq'à l'être infiniment à la circonférence; & qu'à cause de leur rareté, ils ne sont pas assez forts pour être visibles, hormis dans le centre & tout auprès.

Je rapporte ce passage mot à mot d'après l'original & d'après la traduction de Mr. Coste.

Je suis fort éloigné de rien décider sur la clarté & la justesse de cette idée de la vision; à la prendre dans le sens le plus intelligible, elle seroit la réfutation la plus complette de toute la septieme Proposition; les lunettes seroient parfaites, & la réfrangibilité ne seroit qu'un fantôme. Je remarquerai seulement que l'expérience dont elle résulte, est dans le cas de la précédente; elle ne tend qu'à déterminer la grandeur

P. 80. *) *Respondeo, hoc ita se habere, quia radii errantes non uniformiter per totum id rotundum spatium diffusi sunt; sed in centrum infinito, quam in aliam ullam circuli partem, densius collecti sunt; a centro autem ad usque circonferentiam rarescunt continuo, donec in ipsa tandem circonferentia infinite rari evadunt; & propter raritatem istum, minus fortes sunt, quam ut sensu percipi possint, nisi in ipso centro, aut propius ab eo.*

deur du point lumineux, que les raions solaires forment dans le foyer d'une lentille, & qui est regardé comme une image formée absolument par la diverse réfrangibilité; pendant qu'il s'agit ici de la considération des images des objets dispersées par les raions colorés, & de leur représentation à travers toutes les lentilles qui forment les lunettes.

En considérant les raions solaires dans leur passage à travers une lentille, & en recevant sur un plan ces raions transmis; le cercle lumineux le plus petit dans son foyer est celui où tous les raions se coupent, & selon la loi de l'illustre Newton du mêlange de toutes les couleurs, il doit être d'un blanc éclatant.

Lorsqu'on éloignera le plan de la lentille, en l'approchant du foyer *e*, des raions jaunes & rouges les moins réfrangibles; ce cercle lumineux doit augmenter en grandeur, & prendre une teinture plus forte du jaune & du rouge; dont les raions sont au point de la plus grande convergence, & les raions les plus réfrangibles, le violet, l'indigo, le bleu &c. étant déjà d'une divergence extreme, qui les sépare, l'environneront en conséquence de leur direction divergente, & ne sauroient exciter, par conséquent, qu'une sensation très foible. En supposant le plan précisément dans le foyer *e*, des raions rouges; le cercle lumineux doit être le plus grand, & ne doit être formé que des cercles concentriques de toutes les couleurs séparées, le centre étant un point rouge entouré d'un cercle orangé; celui-ci d'un cercle jaune &c. Lorsqu'on approche le plan du foyer *d*; le cercle lumineux formé de tous les raions mêlés, & à peu près d'un même degré de convergence, doit conserver toujours la couleur blanche; mais il doit augmenter en grandeur, à mesure qu'on l'approche, & le blanc doit devenir plus foible. Voici je crois ce qui peut résulter de cette expérience pour l'éclaircissement de la vision.

L'illustre Newton, pour l'expliquer, fait remarquer d'abord la propriété des raions colorés, d'affecter différemment l'organe de la vue.

Le jaune & l'orangé le font avec une force infiniment supérieure à celle de tous les autres raions, plus fortement que tous les autres ensemble.

Le rouge & le verd ont plus de force que les autres.

Le bleu est une couleur très foible en comparaison des précédentes. L'indigo & le violet sont encore plus obscurs & foibles; de sorte que, comparés aux autres couleurs, ils ne méritent pas beaucoup d'attention.

Je crois qu'il falloit dire & prouver en général, qu'ils n'excitent aucune sensation; c'est-à-dire dans le cas qu'il suppose, en recevant sur le plan le cercle lumineux dans le foyer des raions jaunes.

Je demanderois dans ce cas, d'où vient que l'image des raions solaires a la couleur qui doit résulter du mélange de tous les raions, & que les objets, que l'oeil voit indigos & violets, sont tous précisément de même à travers les lunettes. Si les raions, par leurs différentes vibrations ou masses, affectent le sens de la vue avec une force différente, ce n'est pas pour s'entredétruire, non plus que les sons graves & aigus: l'oeil apperçoit aussi distinctement le violet que le rouge & le jaune.

Après avoir établi le principe d'une force infiniment différente, avec laquelle les couleurs produisent la vision; il partage l'image lumineuse, pour déterminer la densité & la rareté de la lumiere, en deux cercles concentriques, qu'il détermine de la maniere suivante. Si le diametre du petit cercle est la cinquieme partie du diametre du grand cercle; toute la lumiere au dedans du petit cercle sera à toute la lumiere du grand cercle comme 9 à 25.

Cette proportion n'est vraie que pour le cercle lumineux placé dans le foier des raions jaunes; mais elle sera différente, selon qu'il sera placé & formé d'une maniere différente.

D'où il s'ensuit évidemment, dit-il, que la lumiere qui est au dedans du petit cercle, doit frapper les yeux plus fortement, que cette lumiere foible & vague, dispersée dans la circonférence du grand cercle.

Sans

Sans doute, parce que les raions jaunes orangés & rouges qui tombent dans le petit cercle sont au point de la plus grande convergence, où ils forment l'image, & que les autres au contraire divergent au point qu'ils n'en forment plus.

Il prétend ensuite, qu'il ne faut pas placer les images des objets dans le foyer des raions de moyenne réfrangibilité, qui sont sur les confins du verd & du bleu, mais dans le foyer des raions qui sont au millieu de l'orangé & du jaune, dans l'endroit où la couleur est la plus lumineuse & la plus brillante; c'est-à-dire dans le jaune le plus éclatant, qui approche plus de l'orangé que du verd; Et que c'est par la réfraction de ces raions, dont les sinus d'incidence & de réfraction de l'air dans le verre sont comme 17 à 11, qu'il faut mesurer la réfraction du verre & du cristal pour les usages optiques. Il me paroit, qu'il suffit de considérer les raions dans leur passage à travers une lentille, formant les foyers colorés, pour se convaincre;

1) que le plus petit cercle lumineux, ou de la moindre diffusion, formé par tous les raions dans le point où ils se coupent, coïncide avec le foyer des raions de moienne réfrangibilité.
2) que le cercle lumineux que l'illustre Newton réduit à la 250me partie de l'ouverture de la lentille, n'est que le foyer des raions jaunes, orangés & rouges, mêlé & entouré des autres couleurs séparée en cercles concentriques; & qu'il auroit dépendu de lui, de le placer absolument dans le foyer des raions rouges, où il ne doit être qu'un point, entouré des cercles de toutes les autres couleurs; mais alors ce point étant comme zéro à l'ouverture de la lentille, auroit réduit à rien la confusion de la réfrangibilité.

L'image de l'objet, étant placé dans le foier des raions orangés, tout le jaune, l'orangé, & les trois cinquiemes de la moitié la plus brillante du rouge, voisine immédiate de l'orangé, & de la moitié la plus brillante du verd, qui suit le jaune; tomberont dans un cercle dont le diametre est environ la 25me partie de celui de la lentille.

Deux

Deux cinquiemes de la moitié la plus brillante du rouge & du verd tomberont hors de ce cercle tout à l'entour, & deviendront trois fois plus rares.

De l'autre moitié du rouge & du verd foncé $\frac{1}{4}$ tombera dans le second cercle; les trois autres se disperseront dehors par un espace 4 ou 5 fois plus grand, & deviendront 30 ou 40 fois plus rares. La lumiere de ces couleurs obscures & sombres par elles-mêmes raréfiée à un si grand degré ne sera plus en état de frapper l'organe de la vue; Et les trois autres couleurs le bleu, l'indigo & le violet, plus sombres & obscures encore, & raréfiées infiniment, seront à regarder comme non existantes. Car la lumiere dense & éclatante renfermée dans le cercle, obscurcira la lumiere rare & foible de ces couleurs obscures, qui sont autour de ce cercle, & les rendra presque insensibles.

Tout cela est vrai pour le cas particulier du cercle lumineux, placé & considéré dans le foyer des raions jaunes; mais ne prouve rien au delà. On croiroit, la moitié des couleurs étant anéantie, que toute la nature devroit paroitre en jaune à travers les lunettes; heureusement représentent-elles les objets avec les mêmes couleurs qu'ils sont vus de l'oeil. Mais, supposé que cette densité & rareté des raions soit vraie exactement, que prouveroit-on par là? Une force différente dont les raions colorés sont doués, & avec laquelle, en affectant le sens de la vue, ils excitent la sensation des couleurs; propriété que leur différente réfrangibilité & réflectibilité prouvoit déjà sans replique. Mais il s'agissoit ici d'expliquer la représentation des objets & de leurs images à travers plusieurs lentilles; ensuite, pourquoi une lunette construite avec intelligence, représente distinctement, pendant qu'une autre enveloppe les objets des couleurs, & pourquoi cela arrive avec la même lunette, selon que l'oeil change de place.

L'illustre Newton avoit supposé ou établi d'abord, que le jaune & l'orangé tombent dans un petit cercle, dont le diametre est égal à la 250me partie de celui de l'ouverture de l'objectif, & que ce cercle lumineux est l'image réfrangible; il le déduit encore ici, comme une conséquence nécessaire, dont il ne se met pas en peine d'énoncer le

prin-

principe: Ainsi l'image sensible d'un point lumineux, dit-il, est à peine plus large qu'un cercle dont le diametre & la 25ome partie du diametre de l'ouverture du verre objectif d'un bon Télescope; ou n'est pas de beaucoup plus large, si vous en exceptez une lumiere nébuleuse foible & obscure qui est autour, à laquelle un spectateur ne fera aucune attention.

Si cette image est comme 55, formée par tous les raions dans le foyer des raions moiens, où tous les raions se coupent, elle diminuera à mesure qu'on l'approchera du foyer des raions rouges, jusqu'à être comme zéro; mais ce ne sera plus l'image de tous les raions, mais des rouges absolument; au lieu qu'elle deviendra plus grande & plus foible à mesure qu'on l'approchera du foyer des raions violets, parce que elle sera formée par tous les raions qui n'ont pas le degré nécessaire de convergence.

L'illustre Newton cite enfin l'expérience à laquelle il prétend que cette image réduite à la 25ome partie de l'ouverture de l'objectif est conforme. Dans un Télescope de 100 pieds de longueur & de 4 pouces d'ouverture, cette image n'excédera par conséquent point 2'', 45''', ou 3''; & celle d'une lunette de 20 ou 30 pieds & de 3 pouces d'ouverture, n'occupera que 5'' ou 6''.

Ce qui est d'accord avec l'expérience des Astronomes, qui ont trouvé, que les lunettes de 20 à 60 pieds donnent le diametre des étoiles fixes de 5'', 6'', ou tout au plus de 8 à 10 secondes.

Il me sera permis de demander si la théorie & l'expérience sont d'accord, que les lunettes, lorsque l'ouverture des objectifs est dans les justes bornes, représentent également bien, quelleque soit leur longueur, de 20, 30, 60 ou 100 pieds; que devient la réfrangibilité?

L'illustre Newton ajoute; & lorsqu'on enfume suffisamment l'objectif, pour empêcher le passage de cette foible lumiere qui paroit dans la circonférence de l'étoile; elle ne paroitra plus qu'un point Mathématique.

C'est par cette raison enfin que la lumiere irréguliere, qui se fait voir dans la circonférence de tout point lumineux, doit être moins vi-

visible par les lunettes courtes, que par les longues, parce qu'elles transmettent moins de lumiere à l'oeil.

Tout cela est vrai lorsque la lunette est bonne; si elle représentoit confusément, il ne serviroit à rien de l'enfumer; il me paroît outre cela qu'on n'enfume les objectifs, que pour amortir la trop grande clarté des corps celestes; & les objectifs hélioscopes de verre colorés dont on se servoit en Allemagne pour les observations celestes dans le siecle passé, seroient infiniment préférables à ce qu'il me paroit aux verres enfumés, mais l'Astronome prouve démonstrativement l'effet de la confusion, qui résulte de l'ouverture & décide de celui de la réfrangibilité, lorsqu'il est obligé de rétrécir l'ouverture en couvrant l'objectif, pour ne recevoir que les raions qui passent le plus près du centre. Une lunette longue produit plus de confusion qu'une courte, parce que celle de la réfrangibilité augmente en raison des longueurs; mais point du tout parce que la lunette courte transmet moins de lumiere. La clarté ne dépend pas de la longueur des lunettes; mais de l'ouverture de l'objectif. Et si la longueur y entre pour quelque chose, une lunette longue doit faire perdre plus de raions & transmettre moins de lumiere qu'une courte; l'ouverture des objectifs étant supposée la même.

Je viens à la conclusion de l'illustre Newton, telle qu'il l'énonce lui-même. Supposé que l'image sensible d'un point lumineux soit même 250 fois moins large que l'ouverture du verre, (il paroit en douter l'aiant portée d'abord à 55;) cette image ne laisseroit pas d'être encore plus grande qu'elle ne le seroit si elle n'étoit grossie que par la sphéricité.

Car, n'étoit la différente réfrangibilité des raions, sa largeur dans un Télescope de 100 pieds dont l'ouverture est de 4 pouces ne seroit que $\frac{961}{72000000}$ parties d'un pouce, comme il paroit par le calcul qui en a été fait ci dessus; & par conséquent, dans ce cas les plus grandes erreurs, causées par la sphéricité du verre, seroient par rapport aux plus grandes & plus sensibles erreurs, causées par la différente réfrangibilité des raions, comme $\frac{961}{72000000}$ par rapport à $\frac{4}{250}$

tout

tout au plus; c'eſt-à-dire comme 1. à 1200; ce qui fait aſſez voir que ce n'eſt pas la ſphéricité des verres, mais la différente réfrangibilité des raions, qui empêche la perfection des Téleſcopes.

Il ajoute enſuite, que, ſans cette différente réfrangibilité des raions, on pourroit rendre les lunettes beaucoup plus parfaites, avec des objectifs compoſés de deux lentilles, dont les faces extérieures ſeroient également convexes, & les intérieures également concaves, & dont l'entredeux ſeroit rempli d'eau.

Les réfractions des faces concaves corrigeront la confuſion qui réſulte de celle des faces convexes. Si le diametre de la ſphere des faces concaves B eſt à celui de la ſphere des faces convexes D, comme KK — KI: RK — RI, ou comme le quarré du ſinus de l'incidence du raion de l'eau dans l'air, moins le produit de ce ſinus & de celui de l'incidence du raion du verre dans l'eau, eſt au produit du ſinus de l'angle de réfraction du raion de l'eau dans l'air, & de celui de ſon angle de réfraction du verre dans l'eau, moins le produit du ſinus de l'angle de réfraction du raion de l'eau dans l'air, & du ſinus de l'angle d'incidence du raion du verre dans l'eau. Il eſt fâcheux qu'il ne donne pas la démonſtration de cette conſtruction admirable, dont la découverte ne ſeroit pas inférieure à celle de la réfrangibilité, & qu'il ne s'explique pas s'il l'a fait exécuter.

Il paroit que la prévention favorable pour l'importance de la réfrangibilité par rapport aux lunettes, ne lui a pas permis ſeulement d'en avoir l'idée, parce qu'il comptoit pour rien d'avoir des objectifs exemts de la confuſion de la ſphéricité, qui, infiniment petite, portoit peu de préjudice à la perfection des lunettes; & il paroit n'avoir pas le moindre doute ſur le ſuccès de ſa lentille. Ce ſeroit là un moyen, dit-il, de rendre les Téleſcopes aſſez parfaits, n'étoit la différente réfrangibilite des diverſes ſortes de raions.

Mais, à cauſe de cette différente réfrangibilité, je ne vois point encore qu'on puiſſe, par le ſeul ſecours des réfractions, autrement perfectionner les Téleſcopes qu'en augmentant leurs longueurs.

On ne s'attendroit pas à cette décision, qui renverse toute la proposition; & on ne croiroit pas que l'illustre Newton pût tomber dans une contradiction aussi ouverte avec lui-même & avec ses principes. S'il est vrai, que la confusion excessive de la réfrangibilité est la cause irrémediable de l'imperfection des lunettes; & que cette cause est proportionelle dans les effets aux foyers des lentilles; elle doit manifester le trouble le plus funeste pour la vision, à mesure qu'on emploie des objectifs dont les foyers sont plus éloignés; & il seroit absurde d'augmenter la longueur des lunettes, pour augmenter le mal, & de prétendre y remédier en le portant à l'extreme; le remede au contraire ne pourroit être que dans leur raccourcissement, avec lequel on diminueroit le mal au point qu'il seroit nécessaire, ne pouvant pas le guérir.

Il me paroit que cette décision, pour être juste & conforme à la vérité, ne sauroit être énoncée que de la maniere suivante. L'expérience prouve, que la diverse réfrangibilité ne trouble pas la vision, quelleque soit la longueur des lunettes; lorsque dans la construction l'ouverture de l'objectif, l'arrangement, les foyers des oculaires, & la place de l'oeil, sont bien déterminés.

On apperçoit au contraire la confusion la plus étrange, aussitôt qu'on augmente l'ouverture des lentilles, resserrée dans les bornes les plus étroites, pour obtenir, avec le degré proportionnel de clarté, des grossissements un peu considérables; & le seul remede qu'on a trouvé jusqu'à présent, c'est l'augmentation de la longueur des lunettes, pour pouvoir emploier des objectifs d'une ouverture proportionnée à une multiplication donnée.

Donc, ce n'est pas la diverse réfrangibilité, mais la confusion sphérique dépendante de l'ouverture des objectifs, qui est la cause de l'imperfection des lunettes, & à laquelle il faudroit tacher de remédier. J'ajouterai que le plus haut degré de perfection seroit sans doute celui de délivrer les lunettes absolument de l'un & de l'autre défaut, pour obtenir des objectifs d'une ouverture sans bornes, qui ne formeroient qu'une seule & unique image dans leur foyer.

Il

Il finit par faire connoître le Télescope à réflexion, qu'il dit avoir imaginé, ayant vu que la perfection des lunettes d'une longueur donnée, étoit une affaire désespérée.

Le celebre Jacob Grégori l'avoit déjà trouvé avant lui, & fait connoitre dans son *Optica promota* imprimée en 1663.

La grandeur qui paroît faire la base du caractere de l'illustre Newton, & qui tient essentiellement à une ame douée d'aussi belles qualités que la sienne, ne permet pas de croire qu'il en ait eu connoissance; Mais quels avantages ne devoit-on pas se promettre pour les sciences, si, au lieu de désesperer de la possibilité de perfectionner les lunettes, il eût soumis a l'examen l'objectif qu'il regarde comme exemt de la confusion de la sphéricité.

Il paroit que la vérité se voile & se couvre, lorsque son disciple favori quitte le flambeau de l'expérience, qui éclairoit tous ses pas, & le quitte précisément au moment où il importoit le plus de s'en servir.

Sa prévention nous a privé non seulement de ses belles lumieres; elle paroit avoir arrêté encore depuis plus d'un demi-siècle toute recherche, sur un des sujets les plus intéressants pour les sciences & pour les hommes en général.

L'amour propre mal-entendu est le partage des ames petites & bornées; l'homme renfermé dans la sphere étroite des miseres dont il s'occupe, les regarde comme des choses de la plus grande importance, parce qu'il y tient & qu'il ne conçoit rien au delà.

Cette foiblesse est inconnue à l'homme éclairé sur le néant de la place qu'il occupe dans l'immensité des êtres.

Mais, si le trop d'attachement à nous-mêmes peut mériter d'être excusé, lorsque, joint a des idées dont l'importance & le grand intérêt nous occupe déjà: il nous surprend & nous entraine malgré nous; le Grand-Homme, dont j'ai cru devoir soumettre à l'examen un sentiment, ou plutôt une prévention, qui paroit y tenir, & qui depuis lui suspendoit les recherches les plus intéressantes; l'immor-

tel Newton, dis-je, doit être au dessus de notre blâme, lorsqu'il s'arrête avec trop de complaisance, à la découverte admirable qu'il venoit de faire, & néglige l'examen de ce qu'il croit lui être contraire.

Il nous apprend avec quelle attention nous devons veiller sur nous-mêmes.

L'amour du vrai & du bien, ce ressort puissant, le germe des vertus & des talents qu'on appelle l'amour de la gloire, est le principe de la perfectibilité dans l'homme; lorsqu'éclairé sur sa condition, il aspire à la perfection, qui peut être le partage de la foiblesse humaine, cherche la vérité en tout, & ne respire que le bien & les affections des êtres intelligens heureux, la bienveillance & la bonté.

Lorque cette belle lumiere s'éteint, nous sommes le jouët de l'ignorance, d'une ambition monstrueuse, de l'erreur, d'une vanité imbecille & du trouble de toutes ces passions qui font de l'homme un furieux, misérable & malheureux, ennemi de ses semblables, & de tout ce qui l'environne.

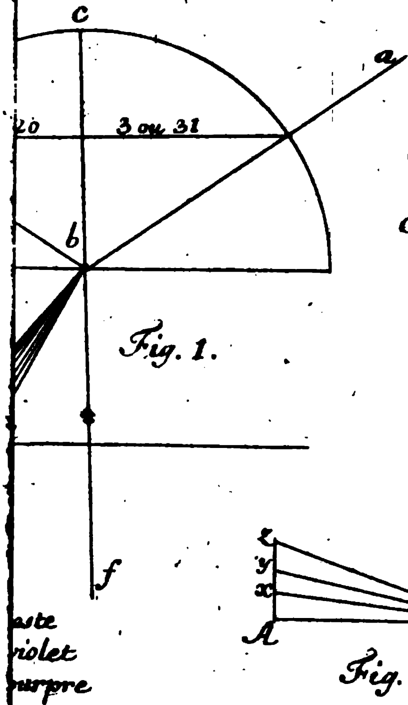


Fig. 1.

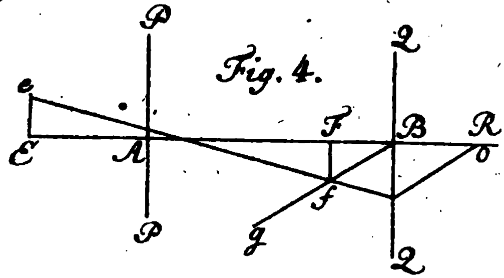


Fig. 4.

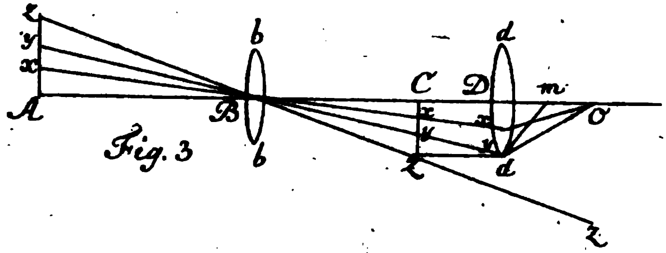
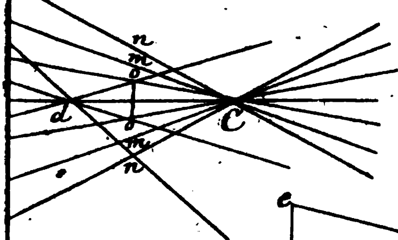


Fig. 3

Fig. 2.



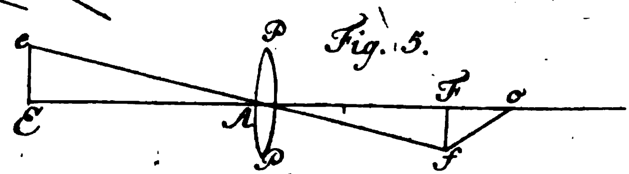


Fig. 5.

Mem. de l'Acad. 1760. Pl. 1 pag. 44.

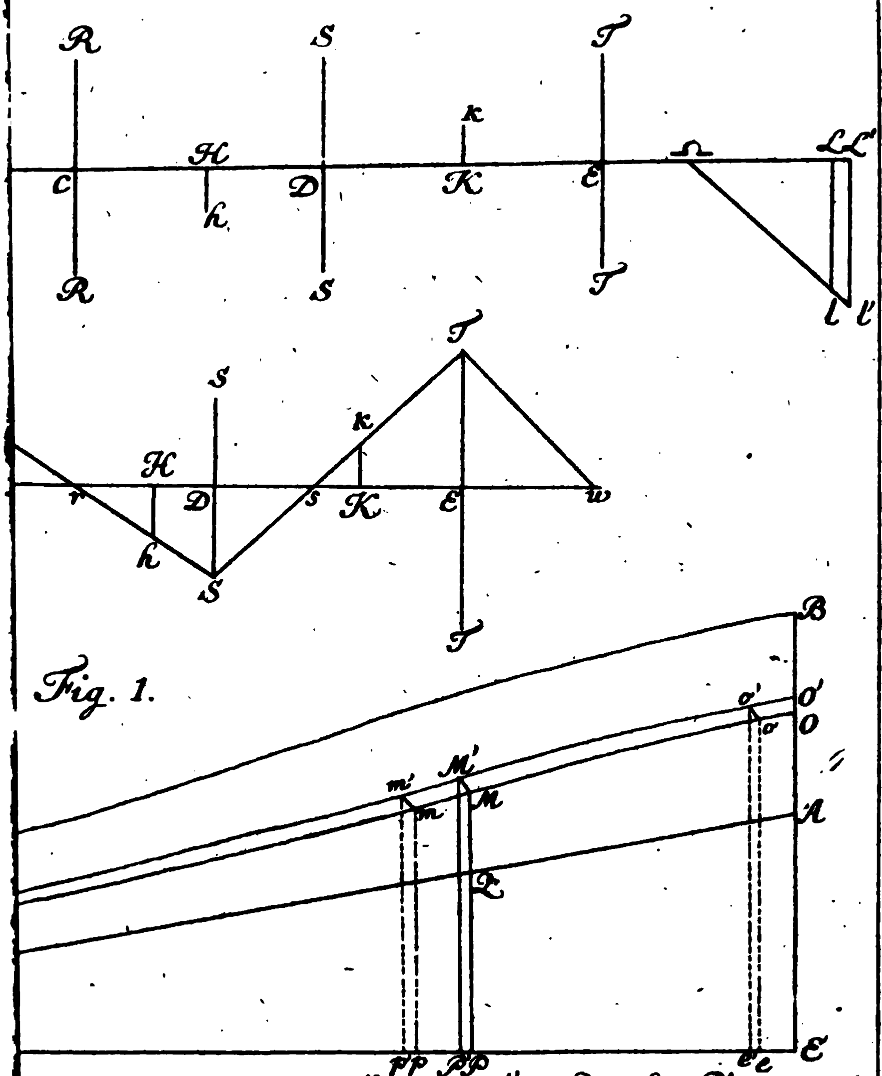


Fig. 1.

Mem. de l'Acad. 1760. Pl. 2. pag. 44.

DISSERTATION

SUR

LE SEL TERRESTRE, MARIN ET COCTILE,

PAR M. DE FRANCHEVILLE.

Je me propose d'examiner ici le principe du sel, de faire voir que celui qu'on tire de sa propre mine, c'est à dire le sel terrestre, fossile ou minéral, est la cause de la salure des eaux de sources, sans que celles-là contribuent en rien à la salure de celles-ci, comme quelques-uns l'ont pensé. Enfin, après avoir prouvé que ces trois sortes de manieres de tirer du sel étoient connues des anciens, j'en expliquerai le méchanisme tel que les modernes l'ont perfectionné *a*).

§. I.

Du principe du Sel.

Le sel considéré dans son principe est une substance acide *b*) si généralement répandue dans tous les corps, que l'on peut dire qu'elle entre pour beaucoup dans leur composition, puisqu'ils fournissent tous du sel lorsqu'ils sont décomposés par les opérations de la chymie.

La médecine en trouve de salutaires dans les plantes, dans les végétaux, dans l'homme même, & jusques dans les animaux.

Peu s'en faut que Becher *c*), Médecin de Spire, & Chambon, premier Médecin de Jean Sobieski, ne le regardent comme le premier principe de la Nature. Du moins tous les Physiciens modernes ne

a) Cette Dissertation a été faite en 1743.

b) Acta erudit. an. 1683. p. 272.

c) Tripus hermetic.

lui refusent-ils pas une place honorable dans les divers systemes qu'ils ont imaginés pour rendre raison de la formation des corps.

Lewenhoek prétend qu'il fait la liaison dans les pierres comme la chaux dans les bâtimens. M. Dufay d) en avoit trouvé dans la chaux même contre l'opinion commune des Chymistes. Les différentes analyses des eaux minérales faites par Mssrs. Dodart, Geoffroi, Boulduc, Bourdelin, Lemeri, Homberg & les autres, ont toutes donné une partie de sel assez considérable. M. Hook e) en admet jusque dans l'air, prétendant que les parties terrestres & aqueuses sont agitées par la matiere étherée, & que l'air en est une espece de teinture & de dissolution de la nature du sel.

En supposant, comme ces savans le font, que le sel a tant de part à la constitution de la Nature, ils auroient du travailler en même tems à rendre raison de sa propre origine: mais, contens de trouver ce corps déjà formé, ils n'ont point été au delà. A leur exemple je partirai de ce point, laissant à d'autres la gloire d'établir une hypothese capable de développer le méchanisme de sa formation, & d'expliquer l'admirable variété de toutes les qualités qu'il renferme.

§. II.

Le sel terrestre, fossile & minéral, est la cause de la salure des eaux de mer & des eaux de sources, sans que celles-là contribuent en rien à la salure de celles-ci.

Les Philosophes ne sont pas d'accord entr'eux sur l'origine des sources. Mais par rapport à la question qui se présente: Qu'elles soient formées par la circulation des eaux de la mer ou par les pluies, ou par les vapeurs de la terre: peu m'importe: de quelque maniere qu'elles naissent, elles doivent être d'une qualité semblable à peu de chose près, à moins qu'elles ne trouvent en chemin quelque principe qui les altere. Car, si l'on suppose que leur salure vienne de la mer, comment se fera-t-il que des sources qui en sont voisines donnent une

d) Mém. de l'Acad. des scienc. 1724. p. 88. & suiv.
e) Microg. p. 13.

une eau parfaitement douce, quand d'autres n'auront point déposé leur sel en se filtrant au travers des terres dans le trajet immense qu'elles ont du faire? Et de plus comment seroit-il possible que ces eaux de la mer se mêlant sans cesse avec les eaux douces d'une infinité de fleuves qui s'y déchargent, ne perdissent pas peu à peu toute leur salure naturelle, s'il n'y avoit dans la mer qu'un certain volume d'eau qui autoit été créé salé, comme il faudroit le supposer en n'admettant aucun principe salant, distinct & séparé de cette eau, ainsi que l'Auteur du Spectacle de la Nature semble l'avoir pensé, lorsqu'il dit que Dieu a ainsi créé ces eaux onctueuses & salées pour en empêcher la corruption & conserver la vie aux poissons.

Mais il est indubitable que cette salure a son principe dans les entrailles de la terre par les mines de sel fossile qui y sont renfermées *f*). Ce sel est de plusieurs especes qui sont le sel gemme, le salpêtre, le vitriol, l'alun, le borax & le sel ammoniac. On les distingue par les figures différentes qu'ils ont dans leurs cristallisations: Le sel gemme étant en quarrés longs, le salpêtre en longues aiguilles, le vitriol en hexagones, l'alun en triangles à pointes abatues, le borax en ovales applatis, & le sel ammoniac en aiguilles branchues. Cependant, quand on examine de près ces configurations, on voit qu'elles ne sont point les figures propres de ces sels ni des acides qu'on en distille, & qu'elles doivent être attribuées plutôt aux alcalis salins, terreux ou métalliques, qu'ils ont dissous & qui leur servent de base. Sur quoi l'on a fait une remarque assez particuliere par rapport à la formation de l'alun. Il y a dans l'Isle de Milo, l'une de l'Archipel, des Marais salans à deux milles de la ville tout au fond de la rade. Pendant l'hiver, l'eau de la mer remplit les reservoirs de ces marais, & dans les grandes chaleurs le sel s'y cristallise. On trouva dans la même isle des mines de fer & de soufre. Et comme on dit que la matiere ferrugineuse mêlée de soufre & mouillée d'eau marine s'enflâme, on prétend que l'alun que cette isle produit aussi en abondance, ne s'y

f) Homberg *Ess. de Chym.* Art. 2. dans les Mém. de l'Acad. an. 1702. p. 44. *Acta erudit.* p. 93. 235. & *Suppl.* p. 104.

s'y forme que parce que la mer s'engoufre dans plusieurs canaux par le moien desquels le sel marin est déposé dans toutes leurs cavités; & là le feu que l'eau marine allume dans quelques-unes des mines de fer & de soufre fait séparer du sel un alcali qui devient le germe & la base de l'alun. De là l'on conclud que, quelque différence qu'on remarque dans les différens sels minéraux, ils viennent originairement du même principe, qui est celui du sel gemme plus ou moins modifié. Ce sel est ainsi appellé à cause de sa transparence: on le trouve communément dans les environs des mines métalliques. Il contient en lui-même l'essence séminale de tous les autres qui n'en sont qu'une émanation. Il se forme des vapeurs de la terre & des parties d'air & d'eau que fixe la chaleur centrale. Il est blanc & se lapidifie par l'effet de ce même feu souterrain. Il est souvent dur comme le marbre, & l'on en fait toutes sortes d'ouvrages de sculpture & de maçonnerie.

Ce sel, à ce qu'on prétend, vegete, se regénere & se reproduit sensiblement par sa propre nature. On croit n'en pouvoir pas douter, quand on considere qu'une montagne de sel gemme, comme celle de Cardonne en Catalogne, ne paroit pas diminuée malgré le volume énorme qu'on en tire chaque année depuis plus de dix-huit siecles. Cependant c'est une grande question entre les savans que cette végétation des fossiles; quoiqu'elle n'ait pas été inconnue aux anciens par rapport au sel, puis qu'Aulugelle *g*) rapporte un passage de Caton, où parlant des Espagnols qui habitoient en deçà de l'Ebre au regard des Romains, ce qui semble désigner justement la mine de Cardonne. „Il y a, dit-il, en ce païs-là une grosse montagne qui est toute de sel. „Plus vous en tirez, plus il en revient." Isidore de Seville *h*) en parle de même. Et Pline *i*) aussi en dit autant du mont Oromenus dans l'Inde. D'ailleurs, comment les savans s'inscriront-ils en faux contre l'expérience des ouvriers qui travaillent dans les carrieres de marbre, lequel y croît, à ce qu'ils disent, par un principe intérieur. Or ce

g) Liv. 2. chap. 22.
h) Orig. lib. 16. cap. 2.
i) Lib. 21. cap. 7.

ce principe doit être commun à tous les fossiles. Aussi y a-t-il encore d'autres mines de sel où la reproduction est également sensible, comme les voyageurs le disent de celles de Sicile, de Trois-Eglises dans l'Arménie, & du Pérou à 18 milles de Lima *k*). Après tout, de quoi cette reproduction dépend-elle, si ce n'est que dans la terre d'une mine où la chaleur centrale a de tout tems fixé des parties de matieres terrestres, étherées & aqueuses, cette même chaleur continue d'en fixer, non pas sur la superficie de la mine, mais au dedans & au dessous, de nouvelles parties qui font aisément étendre & dilater la superficie toute découverte comme elle est. Et cela peut se faire, ce me semble, sans que le sel végete, c'est à dire, sans qu'il y ait en lui un principe de génération, comme les savans l'ont peut-être entendu.

Les eaux de la mer tirent donc leur salure des rochers & des montagnes de sel gemme qui sont cachées sous ces eaux, & dissoutes par l'humidité. Mais ces mêmes eaux sont ameres, ce qui ne peut venir que de la dissolution des lits de bitume. Or le bitume est une matiere huileuse, plus difficile à dissoudre que le sel. C'est ce qui fait aussi que dans l'eau de mer la dose du sel est plus grande que celle du bitume. Car, qu'on prenne 23 onces *l*) deux gros d'eau de citerne dans laquelle on mettra 6 gros de sel marin & seulement 48 grains d'esprit de charbon de terre qui est bitume: on aura une eau de mer artificielle de même goût que la naturelle. La petite quantité de bitume, sa legéreté & la qualité onctueuse dont elle est imprégnée, font qu'après avoir perdu sa salure par la distillation, elle ne laisse pas de conserver encore son amertume, son goût désagréable, & même, à ce qu'on prétend, une qualité malfaisante. Mais la distillation qui s'en fait naturellement par le soleil, & qui est assez différente de celle qui se fait par l'alembic, purge parfaitement l'eau de mer de son bitume.

k) Daviti Sicil. p. 554. Tournefort Voyag. du Levant lett. 19. Varenius Geog. l. 1. p. 110.

l) L'once fait deux lots de ce païs-ci; le gros est la huitieme partie de l'once; & les 48 grains font les $\frac{2}{3}$ du gros.

me. Au reste il y a dans la terre tant de matieres différentes que la mer lave, & dont elle dissoud, leche & détache des particules, qu'on peut assez raisonnablement croire que le bitume n'est pas le seul principe qui s'y mêle avec le sel. C'est peut-être pourquoi ce sel, pris sur différentes côtes de la mer, est de différent goût, & produit des effets très différens, aussi bien que les esprits acides qui en sont distillés. On en distingue aussi de deux couleurs dont l'une est blanche & l'autre grise ou d'un cendré obscur. Le sel gris se tire des eaux profondes, & l'autre des superficielles. Celui-ci est le seul à qui l'on trouve de l'acide: il est d'un salé plus mordant, & a moins d'amertume que le sel gris. Ajoutez à cela que l'eau de mer n'est pas également salée partout. Car, quoique j'aie dit plus haut que sur 24 onces de cette eau, il y a six gros de sel, ou ce qui revient au même, qu'elle contient de sel la 32me partie de son poids, cela n'est vrai que par rapport à l'eau prise sur la surface de la mer; celle du fond étant plus salée, & aiant de sel la 29me partie de son poids. Les eaux plus salées sont aussi plus pesantes, & plus les eaux sont éloignées des bords de la mer, plus elles sont salées.

Voilà l'origine de la salure des eaux de mer: & elle est la même que l'origine de celle des sources. Car, soit que ces sources se forment par la circulation des eaux de la mer, soit par les pluies, ou par les vapeurs de la terre que la chaleur centrale éleve & condense dans ses cavités; leurs eaux ne deviennent salées qu'en passant par les carrieres de sel gemme renfermées dans la profondeur des terres, où elles se chargent de parties de sel plus ou moins fortes, suivant que ces eaux en parcourent sans interruption un plus ou moins long espace.

Non seulement les différens filets de ces sources portent avec eux, les uns plus, les autres moins de sel: leurs eaux n'ont pas même une couleur exactement semblable, parce que la terre étant extrémement variée dans sa composition, les eaux qui en sortent, participent de tous ses différens modes, & se trouvent imprégnées de parties de sel ou chargées de parties minérales, à raison des différences de leurs positions.

L'expérience a fait obſerver que les rameaux de ces ſources croiſſent ou diminuent à proportion que la ſaiſon eſt ſeche ou pluvieuſe, & que plus ils ſont abondans, plus leurs eaux ſont ſalées: ce qu'elles ont de commun avec les eaux de la mer, & qui doit naturellement provenir, de ce qu'aiant plus de volume & de poids, & par conſéquent plus de force & de rapidité, elles lêchent ou frotent avec plus de violence, occupent plus d'eſpace, émouſſent plus facilement les angles des ſinuoſités qu'elles parcourent, & par là entraînent avec elles les particules ſalines juſqu'où le niveau leur permet d'arriver.

§. III.

Ces trois ſortes de manieres de tirer du ſel, c'eſt à dire des mines, des eaux de mer & des eaux de ſources, étoient connues des Anciens.

Le ſel eſt une denrée ſi néceſſaire à la vie, qu'il y a bien de l'apparence que l'on commença à en faire uſage dès les premiers tems du monde. Il n'eſt pas ſeulement à l'homme d'une extrême utilité, ſoit pour donner du goût aux alimens, ſoit pour les préſerver de la corruption: on en mêle auſſi parmi la nourriture des animaux lorsqu'on s'apperçoit qu'ils manquent d'appétit, ou qu'on veut les exciter à la copulation; on en emploie dans la Teinture écarlate, & il ſert encore au labourage, échauffant la terre où l'on en jette, & empêchant les inſectes de ronger le grain.

Il eſt difficile de ſavoir lequel du ſel minéral ou du ſel marin a été mis en uſage le premier. Il y a des mines, comme celle de Cardone, où le ſel paroît à découvert & brille comme une roche de criſtal ou de pierreries quand le ſoleil donne deſſus. Rien n'étoit plus aiſé que de ſe procurer de ce ſel. Mais il y a auſſi des marais ſalans, ſurtout dans l'Orient, où le ſel ſe forme de lui-même ſans que l'induſtrie humaine y contribue en rien; & il n'étoit pas plus difficile de recueillir ce ſel que de le prendre ſur la ſuperficie d'une mine. Pour ce qui eſt du ſel tiré des eaux par le ſecours du feu, on peut, ſans crainte de ſe tromper, en regarder l'uſage comme beaucoup poſtérieur à celui

des deux autres: quoiqu'il paroisse par le témoignage des anciens qu'ils les connoissoient tous trois.

En effet, pour commencer par le sel minéral, outre ce qu'Aulugelle & Isidore que j'ai déjà cités en rapportent, d'autres auteurs dont les noms suivent, prouvent par les remarques qu'ils nous ont laissées, qu'on n'ignoroit point la maniere de le tirer des mines. „En „Espagne, dit Solin *m*), on tire de la terre un sel fossile.“ Ce sel est le même dont Sidoine *n*) compare le brillant à celle d'une lettre qu'on lui avoit écrite. „J'ai reçu, dit-il, votre lettre qui a beaucoup de „ressemblance avec le sel d'Espagne que l'on coupe dans les mon„tagnes de Tarragone: car plus je l'examine, plus je la trouve bril„lante & piquante.“ Il est probable que Pline *o*) ne connoissoit point cette mine, lorsqu'il disoit que tout lieu où l'on trouve du sel est stérile & hors d'état de rien produire, puisqu'au contraire la superficie de cette montagne est toute couverte de pins fort hauts, & de quantité de vignes dont le vin est excellent *p*). Cependant il avoit une parfaite connoissance de celle d'Egelesta dans l'Espagne citérieure, c'est à dire d'Uniesta dans la Castille près de Cuença, à l'égard de laquelle il écrit *q*) que les pieces de sel qu'on y coupoit, étoient entiérement transparentes, & que la plupart des médeçins lui donnoient depuis longtems la préférence sur les autres sortes de sel. Il connoissoit aussi *r*) celui du Mont Oromenus dans l'Inde dont j'ai déjà parlé, & qui, suivant lui, produisoit aux Rois de ce païs-là un revenu plus considérable que l'or & les perles. Mais ce qu'il rapporte *s*) du sel qu'on trouvoit près de l'ancienne Utique, aujourd'hui Biserte dans le Roiaume de Tunis, paroitroit bien plus singulier si son récit n'étoit éclairci par l'Auteur du Livre grec cité au bas de la page *t*), sur lequel M.

m) Solin. cap. 23. p. 43.
n) Sidon. lib. 9. epist. 12.
o) Hist. nat. lib. 31. cap 7.
p) Vayrac, Etat prés. d'Espag. T. 1. pag. 134.
q) Plin. lib. 21. cap. 7.
r) Ibid.
s) Id. lib. 31. cap. 7.
t) περὶ θαυμασίων ἀκουσμάτων: à la Biblioth. Roy. de Paris.

M. de Méziriac a fait des notes dont je ferai usage ici. On fait, dit Pline, des monceaux de ce sel en forme de collines; Et quand ces monceaux ont été exposés au soleil & à la lune, il n'y a point d'humidité qui puisse les fondre: à peine peuvent-ils être entamés par le fer. Ce sel, dit l'autre Auteur, naît à trois orgyes ou 18 pieds de profondeur: il est blanc à la vue, moû & semblable à une composition très-visqueuse: mais, lorsqu'il est tiré de la mine & exposé à l'air, il se durcit & ressemble alors au marbre de Paros: on en fait des figures & des vases. On voit par là que le sel d'Utique étoit à proprement parler le sel terrestre ou sel gemme: au lieu que, suivant Pline, ce sel tenoit beaucoup de la nature du sel marin: que sa substance s'épaississoit & se cristallisoit par le seul secours du soleil & de la lune. C'est pourquoi il le met au rang des sels factices u). Mais il s'est visiblement trompé. D'ailleurs, on ne trouve plus dans les Roiaumes d'Alger, de Fez & de Maroc, qui occupent la place de l'ancienne Mauritanie, les salines dont il dit x) que les Hammanientes qui habitoient ce païs-là, tiroient des pierres de sel pour en bâtir les maisons. Mais Hérodote y) avant tous ces Auteurs, avoit parlé de celles des Atlantes qu'il place à dix journées plus loin que les Garamantes. Et enfin l'ancienne Vallée des salines, si fameuse dans l'histoire sainte z) par la victoire que David y remporta sur les Iduméens en revenant de Tsoba en Syrie, n'étoit autre vraisemblablement qu'une vaste plaine qui est environ à une lieue de Palmyre vers l'Idumée, & qui est encore toute remplie de sel a), quoiqu'on en tire continuellement pour tout le païs.

Je passe de ce sel de mine au sel marin. J'ai dit plus haut que celui-ci n'aiant besoin que du soleil pour se cristalliser, il étoit assez probable qu'on s'en fût servi avant l'autre. Cependant il est remarquable que le plus ancien passage qui fasse mention de ce sel marin semble marquer que déjà l'art entroit pour quelque chose dans sa for-

u) Factitii varia genera. ibid.
x) Lib. 5. cap. 5.
y) Lib. 4. Cap. 184.
z) II. Samuel chap. 8.
a) Halifax, Rel. de Palmyre.

mation. C'eſt au moins ce qu'on peut conjecturer s'il eſt vrai que les eaux du Mazerephoth dont il eſt parlé dans Joſué *b*), étoient des eaux ſalées de la mer, que l'on faiſoit couler dans des canaux, & qui s'évaporant par la chaleur du ſoleil venoient à produire du ſel. Celles du Lac Aſphaltite, ou de la mer morte, étoient auſſi de ce nombre. Le Prophete Ezéchiel dit *c*) que les bords de cette mer & les marais qu'elle forme feront deſtinés à y faire des ſalines. Ce ſont ces ſalines que les Rois de Syrie *d*) avoient dans la Judée, & ſur lesquelles ils avoient établi des impôts aſſez onéreux pour faire croire aux deux Démétrius Soter & Nicator, qui étoient du nombre de ces Rois, qu'offrant aux Juifs de les en décharger, cela engageroit cette nation à s'unir avec eux contre Alexandre leur ennemi: ce qu'elle auroit fait ſi elle eût cru ces propoſitions ſinceres. Galien qui connoiſſoit le ſel de ces ſalines, & qui étoit homme à en juger, aſſure *e*) qu'il étoit excellent, qu'on s'en ſervoit pour aſſaiſonner les viandes, qu'il étoit plus cuit que les autres ſels, ce qui le rendoit plus pénétrant, plus chaud, & par conſéquent plus propre pour la digeſtion. Il ajoute que la mer morte eſt non ſeulement ſalée au goût, mais amere & tellement imprégnée de ſel que ceux qui s'y plongent en ſortent chargés de ſaumure, & que ſi l'on y jette du ſel il a de la peine à s'y fondre. Ainſi c'eſt avec raiſon que les Hébreux qui donnent le nom de ſel au bitume & au nitre, appellent cette mer, mer de ſel, *mare ſalis*, *mare ſalſiſſimum*. Elle ne nourrit pourtant aucun poiſſon; & c'eſt une preuve que Dieu n'a point créé l'eau de la mer ſalée & bitumineuſe pour la conſervation du peuple aquatique, comme l'a prétendu l'Auteur du Spectacle de la Nature. Mais ces ſalines, quelqu'anciennes qu'elles ſoient, ne le ſont peut-être pas autant que celles d'Aloné, Isle de la Propontide vis à vis de Cyſique: s'il en faut croire Etienne le Géographe qui aſſure que cette Isle a été ainſi nommée *f*) à cauſe que ſes habitans ont eu la gloire d'avoir

b) Joſué. Voyez Calmet Dict. de la Bible.
c) Cap. 47. v. 11.
d) 1 Maccab. C. 10. & 11.
e) De Simpl. Medic. facult. l. 4. cap. 19.
f) ἅλων, ſal.

voir inventé l'art de faire le sel marin. D'ailleurs Tite Live donne une antiquité presque égale à celles d'Ostie, aujourd'hui de Porto, à l'embouchure du Tibre, qu'il dit avoir été établies en même tems que cette Ville, sous le régne d'Ancus Martius, vers la centieme année de la fondation de Rome, & la 650me avant l'Ere Chrétienne. Le sel qu'on en tiroit étoit transporté à Rome & jusques dans la Sabine. Celui qui restoit dans Rome étoit renfermé dans des magazins appellés aussi salines, *Salinæ*, qui étoient dans le XI Quartier de cette grande Ville, nommé *Circus Maximus*. Et à l'égard de celui qu'on envoioit dans la Sabine, il avoit donné le nom de *via salaria* à l'une des 29 voyes de Rome, qui étoit un grand chemin au dehors de la porte Colline. Athénée parle aussi d'une saline appellée Tragesaion, qui étoit près d'Hamaxitus dans la Troade. Il y avoit un certain tems de l'année où le sel se formoit de lui-même. D'abord les habitans de la Troade avoient eu la liberté de s'en servir sans être assujettis à aucun impôt. Par la suite Lysimachus qui régnoit l'an 286 avant J. C. y en mit un: Et aussitôt, dit pieusement Athénée, on vit les salines tarir par une espece de prodige; comme si cet impôt eut révolté la nature, de sorte que Lysimachus, étonné de cette avanture, abolit son impôt: après quoi le sel se retrouva comme auparavant. Ce miracle m'en rappelle un autre de la Légende, à peu près de la même force. On trouva dans le VII siécle des eaux salées près de l'abbaye de Moyenmoûtier en Lorraine. Les peuples, attirés par la dévotion qu'ils avoient à St. Spinule & par ces sources de sel, résolurent d'y établir des salines. Mais St. Hidulphe qui étoit abbé de ce Monastere, craignant que ce grand concours ne nuisit à la tranquillité & au salut de ses freres, adressa ses prieres à son disciple St. Spinule qui étoit dans le tombeau, & le pria de cesser de faire des miracles. Spinule qui ne vouloit pas perdre sa réputation, aima mieux en faire un, qui fit que les sources d'eau salée tarirent, & les peuples s'en allerent. Quant à la fable d'Athénée, elle est réductible à la vérité, en disant simplement que la saline qui avoit été désertée à cause de l'impôt, fut fréquentée comme auparavant dès qu'il eût été aboli. Enfin, Strabon parle du sel marin qui se faisoit

dans

dans les campagnes appellées des Cailloux entre Marseille & l'embouchure du Rhône. Il fait aussi mention d'un peuple de l'Asie mineure, nommé Ozcaoryci, qui avoit dans son voisinage un étang qu'on appelloit Tarra, dont les eaux formoient naturellement du sel. Et depuis encore, dans le bas Empire, Constantin Porphyrogenete a dit la même chose d'un lac de Cappadoce, d'où les Barbares enlevoient du sel.

A l'égard de celui qui se tiroit des eaux de sources, il n'en faut chercher l'origine & la pratique ancienne que chez les Gaulois & les Allemans. Le nombre & l'étendue prodigieuse des forêts dont leurs païs étoient couverts, contribua beaucoup à en rendre l'usage commun. Il ne fut question dabord que de découvrir les sources propres à donner du sel: Mais la chose n'étoit pas si difficile. On remarque souvent autour de ces sources l'herbe & les pierres toutes blanches de sel, ce qui y attire une prodigieuse quantité d'oiseaux qui en sont très-friands, comme on le voit tous les jours au bas de Vezelai dans la Bourgogne *g*). Ailleurs des Troupeaux paissant aux environs d'une pareille source, les Bergers remarquerent que ces animaux s'y portoient d'eux-mêmes & y retournoient souvent; curieux de connoître ce qui pouvoit les y attirer, ils trouverent que c'étoit la qualité de ces eaux. Et c'est ainsi qu'on prétend que furent découvertes les sources de Salins, de Halle & quelques autres. Les Gaulois & les Allemans tiroient du sel de ces eaux dès le tems de Pline, comme il le dit expressément *h*). *Galliæ Germaniæque ardentibus lignis aquam hauriunt.* Les Espagnols donnoient à cette eau le nom de *Muire* ou de Saumure. *Hispaniæ quadam sui parte è puteis hauriunt, Muriam appellant.* Le nom de *Muire* subsiste encore en ce sens dans les salines de Franche-comté. Mais ce que Pline dit ici des Espagnols ne doit s'entendre que de la Navarre, ou plutôt du Béarn où l'on cuit du sel. Car pour l'Espagne propre on n'avoit d'autre sel que celui des Mines, suivant Solin *i*). *Ibi non coquunt sales sed effodiunt.* Les salines des Gau-

g) Piganiol. T. 4. p. 403. 404.
h) Lib. 31. c. 7.
i) Cap. 23. p. 43.

Gaules étoient celles des Séquanois aujourd'hui la Franche-comté. C'est pourquoi Strabon dit que de son tems l'on apportoit à Rome de ce païs là des jambons salés qui y étoient fort estimés. Et pour ce qui est de l'Allemagne, il y avoit des salines en plusieurs endroits, principalement à Halle, alors nommée Dobrebora ou Dobresala, & dans le lieu qu'on appelle aujourdhui Saltzungen ou Saltz, près de la Montagne de Vogelsberg en Franconie, d'où sort la riviere de Sala. Tacite dit *k*) que les premieres furent trouvées par les Hermundures, & que comme cette découverte étoit aussi précieuse que celle d'une mine d'or, les Cattes leur firent la guerre pour ce sujet & vinrent à bout de les en déposséder. Les autres, au rapport d'Ammien Marcellin *l*), occasionnoient aussi entre les Bourguignons & les Allemans de fréquens démêlés, lorsque les premiers demeuroient encore vers la source du Main. Je sais que quelques auteurs peu instruits ont entendu ce passage des salines de Franche-comté. Mais Adrien de Valois ne s'y est pas trompé, il en a fait une remarque expresse dans la préface qu'il a mise à la tête de son Edition d'Ammien Marcellin.

§. IV.

Explication du méchanisme des salines, tel que les modernes l'ont perfectionné.

A mesure que les hommes se sont multipliés, non seulement il a falu tirer des anciennes salines de plus grandes quantités de sel, mais encore on a été obligé de travailler à en découvrir de nouvelles. De là ce nombre prodigieux de salines qu'on connoît aujourd'hui dans les quatre parties du monde; & qui est tel qu'on peut dire qu'il n'y a pas un seul païs où les habitans manquent de sel faute d'en avoir chez eux ou d'en pouvoir tirer de leurs voisins.

En Europe, l'Espagne a des salines dans le Duché de Cardonne en Catalogne: dans l'Arragon: dans la Castille-vieille près de Cuença;

k) Ann. lib. 13. cap. 57.

l) Lib. 28.

ça; dans la nouvelle à Atienca, à Mengravilla près d'Avila & à Infeste: Dans le Roiaume de Valence à Orihuela & à Guardamar: Dans le Roiaume de Grenade près d'Antequera: dans l'Andalousie à San-Lucar entre le port Ste. Marie & Porto Real, & dans l'Isle d'Ivica. Le Portugal en a aux environs d'Alcacer do sal, de Lisbonne & de Porto: mais les principales sont celles de Setubal. La France en a sur les côtes de l'Océan dans les Provinces de Saintonge, d'Aunix, de Poitou, de Bretagne, de Guienne & de Normandie: sur les côtes de la Méditerranée à Pecais, Periac, & Sigean, en Languedoc; à Cannet en Roussillon; à Berre, Hieres, les Maries & Badon en Provence: Elle en a encore d'autres à Tartone, à Moriez & près de Castelane dans la même province; à Camarades au païs de Foix; à Saillies dans le Béarn; à Moienvic dans les Trois Evechez; à Salins, & à Montmorot en Franche-comté; à Sultz dans la basse Alsace; à Marsal, Rozieres, Château-Salin & Dieuse en Lorraine. La Principauté de Montbelliard en a une à Saunot dans le baillage de Vezoul. La Suisse en a dans le Canton de Berne au Bexvieux & à Aigle ou Panex. La Savoie en a une à Moutiers en Tarentaise. L'Italie en a dans le Roiaume de Naples, à Miliano, à Pierrefitte près de la riviere d'Ispica, à Rossano & aux environs d'Altomonte: dans le Roiaume de Sicile, près d'Enne ou de Castro Giovanni, de Camerate, de Nicosie, de Martale, de Trupani, & de Camerani; Dans le Padoüan près d'Albano: Dans le Plaisantin: Dans l'Etat Ecclésiastique, à Porto, à Comachio & à Cervia: Dans la Sardaigne au fond du Golfe de Cagliari sur la côte: & dans l'Etat de Venise, aux Isles de Chiozza ou Gioggia, de Pago, de Capo d'Istria & de Corfou. L'Allemagne en a dans le Westerreich à Thus: dans le comté de Waldeck: dans le Tyrol à Halle: dans la Baviere à Berchtolsgaden, Saltzbourg, Reichenhall & Hallein: Dans la Souabe à Halle & à Schorndorf: Dans l'Autriche à Gemund ou Halstadt: Dans la Franconie à Saltzungen: Dans la basse Hesse à Allendorff in den Sohden: Dans les Etats du Roi à Halle, Salza & Colberg: Dans le Duché de Brunswick à Munden & près de Lunebourg. La Hongrie en a près d'Eperies au Comté de Saran: la Pologne, à

Bochné

Bochné-Colomey, Pinsc & Wéliſka: La Moldavie & la Valaquie en ont auſſi, de même que la Grande Bretagne qui en a en Angleterre dans la province de Stafforshire; dans celle de Cheſhire à Nantwich, Middlewich & Norwich; & dans celle de Worceſtershire à Droitwich: En Irlande en pluſieurs endroits: & en Ecoſſe à Rivel & dans les Orcades.

En Aſie, où je comprends tout ce qui appartient au Turc & à la Ruſſie, il y en a dans la Morée; dans l'Archipel aux Isles de Crete, Milo, Naxie, Foghia & Calcé: Dans la Beſſarabie, à Caffa & en Georgie qui ſont ſur la mer noire: Dans l'Amaſie qui eſt une partie de l'Anatolie, près de Couchahar: Dans la plaine de Palmyre, & dans l'Isle de Chypre: Dans la Moſcovie au deçà du Wolga; le long de la mer Caſpienne; à Solimkamskoi & à Oeſt Toëga: Dans la Tartarie, aux Monts d'Alatof; chez les Calmoucks auprès du fort Jamiſcha ou Jamuſowa; & chez les Cara-Calpaks le long du lac d'Arall: En Perſe, dans les montagnes de Kiliſſim, de Nacht Zuan, de Kulb, d'Urumi, de Kemre, de Hemedan, de Bizetun, de Suldus, & dans celles proche de Darabguierd, Merou & Tauris: Dans l'Arménie près de Trois-Egliſes & entre ce lieu-là & Aras: Dans les Isles d'Ormus, Lareca & Bender Abaſſi, ſur la mer Perſique; & dans celle de Camarana ſur la Mer rouge: Aux Indes, dans la province de Lahor; ainſi qu'à Oranubammara, à Maſulipatan; au Roiaume de Candi dépendant de l'Isle de Ceylan; au Roiaume de Lao; Dans l'Isle de Java près d'Iortan; à la Chine dans neuf provinces; au Japon; & dans le Roiaume d'Aſem.

L'Afrique en a dans l'Egyte le long du Nil & du Lac de Nitrie; en Barbarie dans le Roiaume de Tripoli & la province de Tremezin; Au deſert appellé Saara, dans la mer de ſable & le païs de Senegal; Dans la Guinée au Cap de la Hou, au Roiaume de Fetu, à Acambou, à Labede ou Labade & au Roiaume d'Arder; Dans le Congo ſur la rive méridionale du fleuve Ambriſi près de la côte; dans les Roiaumes d'Angola & de Benguela; Au Monomotapa dans la province de Toraca; dans la haute Ethiopie au Roiaume de Dancal & ſur les

confins de Tigré & d'Angot: dans la basse à Quisama, & au pied du Mont Aurase; Et dans les Isles d'Afrique qui sont les Canaries, les Isles de Sel & de Mayo au Cap-Verd, & l'Isle de Ste. Helene.

Enfin l'Amérique en a dans la Louisiane, dans la Pensylvanie & la nouvelle Angleterre, dans l'Isle de Sel dépendante de la Californie, dans la mer vermeille, dans le Mexique tant vieux que nouveau & sur la côte, dans les Isles de St. Domingue, Portorico, la Martinique, la Guadeloupe, St. Martin, Blanca, Cuba & Bonaires qui sont du nombre des Antilles; dans la Terre ferme, le Pérou, le Chili, les Andes, les Isles Gallapagos & chez les Topinambous: toutes parties de l'Amérique méridionale.

Toutes les Salines que je viens de nommer, mériteroient chacune une description particuliere: mais, par rapport aux différentes manieres dont le sel y est produit, qui est l'objet où je me renferme elles peuvent être réduites à trois classes relativement à la distinction qui a déjà été faite à l'égard des salines des anciens. En suivant cette division, j'en vais expliquer le méchanisme tel que les modernes l'ont perfectionné.

1°. pour le sel qui se tire des mines tout formé.
2°. pour le sel qui se forme au soleil par évaporation.
3°. pour le sel qui se tire par ébullition sur le feu.

I.

Comment le sel gemme se tire des mines & se prépare.

Le sel gemme se trouve dans la terre à différentes profondeurs, quelquefois par veines entourées de terre sans aucun rocher, & quelquefois par lits qui sont l'un sur l'autre à peu près de la même maniere que sont disposés dans les carrieres de pierre commune les divers bancs qu'on appelle coquillart, banc de marche, banc de pierre franche, &c.

Quoique la couleur du sel gemme soit naturellement blanche, on en voit souvent dans la même mine qui est gris de fer ou couleur d'ar-

d'ardoise, avec d'autres d'un rouge de conserve de rose, d'incarnat, de verd, d'orangé, de violet, de bleu, de jaune & de quelques autres teintes, qui toutes cependant deviennent blanches quand les sels ont été broiés & lavés. Le plus pur ressemble au cristal, mais lorsqu'il est grossierement mêlé avec la terre, il en prend la couleur. On a vû un fort beau bleu au milieu d'une pierre de sel cristallin, & dans une autre une très-belle piece de jaune transparent.

Les veines de ce sel sont si grosses qu'on en coupe souvent dans les mines des morceaux qui pesent plus de mille quintaux. On les réduit en quartiers plus ou moins grands, à proportion de la profondeur de la mine: de sorte que dans celles qui sont de 200 Toises, comme en Hongrie & en Pologne on ne donne à ces quartiers que deux pieds de long & un pied d'épaisseur. Les Ouvriers taillent ces blocs de sel avec le marteau, la pince & le ciseau, à peu près comme ceux qui travaillent dans les carrieres. A mesure qu'ils creusent dans la mine, ils ont soin d'en soutenir la voûte par de fort pilastres de ce même sel, taillés au ciseau, qu'ils y laissent de distance en distance. Et à l'égard des pieces de sel, lorsqu'elles sont taillées, on les traîne à force de bras ou avec des chevaux, (car on a trouvé le moien d'en descendre dans ces souterrains,) on les traîne, dis-je, jusqu'au pied de l'ouverture par laquelle ils doivent être guindés en haut.

La machine dont on se sert pour les élever est, comme dans les carrieres, une grande roue qui est au dessus de l'ouverture, & que des chevaux mettent en mouvement pour faire descendre & monter des cables ausquels on attache les quartiers de sel.

Lorsqu'ils sont en haut on les broie, avec de grosses mailles, on les lave, & quelquefois au lieu de les broier, on se contente de les exposer devant les portes aux pieds des hommes & des chevaux qui les foulent & commencent à les briser, en attendant qu'on les porte dans les moulins pour achever de les broier, parce qu'on ne sauroit s'en servir qu'après les avoir fait moudre entre deux meules. Souvent la mine est froide & humide, ce qui fait qu'on a beaucoup de peine à

mettre ce ſel en poudre. Plus il eſt dur & plus il ſe pulvériſe aiſément: on le prendroit alors pour une groſſe farine, car il n'eſt point gréné, & c'eſt en quoi il differe du ſel marin qui doit apparemment cette conſiſtance à l'action du ſoleil.

II.

Comment le ſel marin ſe fait ſans le ſecours du feu.

Quoique le ſel marin puiſſe ſe former ſans le ſecours de l'art, n'aiant beſoin que de l'ardeur du ſoleil pour ſe débaraſſer de l'humidité de l'eau qui l'empêche de ſe criſtalliſer: cependant l'induſtrie humaine concourant avec cette diſpoſition naturelle, ne laiſſe pas d'en rendre la formation plus prompte & plus abondante.

La ſaiſon propre à la ſaunaiſon, (c'eſt ainſi qu'on appelle la formation du ſel marin,) eſt environ depuis la mi-mai juſqu'à la fin du mois d'aouſt, parce qu'alors les jours étant plus longs & les raions du ſoleil dans leur plus grande force, ce ſel ſe forme & ſe criſtaliſe plus promptement. Le tems pluvieux y eſt fort contraire, à cauſe que l'eau douce venant à ſe mêler en trop grande abondance à celle de la mer, la deſſale. Ainſi c'eſt là proprement ce qui décide de la ſaunaiſon, qui n'eſt bonne que dans les beaux jours & pendant la plus grande ardeur du ſoleil.

Le ſel ſe forme dans des marais qui ſont diviſés en quarrés, qu'on appelle aires, de 15. 16. 17. à 18 pieds en tous ſens, & qu'on a enduits de terre glaiſe, bien battue. On y fait entrer par une vanne une certaine quantité d'eau de mer: en quelques endroits un pouce & demi de haut, & en d'autres juſqu'à cinq ou ſix pouces. Le ſoleil & le vent de Nord-eſt ou de Nord-oueſt agiſſent ſur cette eau qui eſt déjà fort échauffée; en trois ou quatre heures le fond des aires rougit & il s'éleve une écume ſur l'eau. Sous cette écume qui ſe diſſipe il ſe forme une glace fort fine tracée en petits quarrés, leſquels ſont autant de grains de ſel qui commencent à ſe former & qui tombent au fond de l'eau dès qu'on rompt la glace.

Pour

Pour avoir du ſel très-blanc on prend cette glace à la façon d'un lait qu'on écrême, & dans ce moment le ſel ſent ſi fort la violette que cette fleur ne le ſent pas davantage. Mais ce ſel n'étant pas pour l'uſage ordinaire, on rompt chaque jour cette glace ou cette croûte que forment les angles des grains de ſel en ſe rapprochant. On la braſſe dans les aires, c'eſt à dire, on la caſſe avec des perches faites en façon de rateau, à meſure que l'eau s'évapore: ce qui ſe fait en deux ou trois jours. Ainſi le ſel que l'eau raréfiée abandonne, s'abaiſſe peu à peu, ſe ſerre & s'épaiſſit, en tombant dans le reſte de l'eau qu'on trouve d'une chaleur exceſſive. Enfin, l'on retire ce ſel avec les mêmes rateaux, on le met en monceaux ſur des levées faites exprès, où il s'égoute, ſe ſeche, & acheve de ſe grainer.

On ne laiſſe pas convertir en ſel toute l'eau qui eſt dans les aires, tant pour le tirer plus blanc & plus net, qu'afin que le reſte de l'eau ſerve de ferment pour diſpoſer la nouvelle qu'on y introduit, à ſe criſtalliſer plutôt.

On compte le revenu des marais par livre qui eſt compoſée de 20 aires. Ce revenu n'eſt pas toujours égal, parce qu'il dépend de la ſaiſon plus ou moins favorable. Dans un tems ſec la livre de marais peut rendre 140. quintaux de ſel. Mais on compte qu'il diminue au moins d'un ſixieme ſur les levées. Car, quoiqu'on le couvre de roſeaux & de jonc, cette couverture n'empêche pas tout à fait que la pluie ne pénétre juſqu'au ſel & ne le fonde. D'ailleurs il ſouffre un déchet naturel par l'affaiſſement de ſes parties.

Le ſel marin nouvellement fait eſt nuiſible à la ſanté, parce qu'il conſerve quelque partie de nitre & de ſoulfre avec une certaine acrimonie ou amertume qui eſt occaſionnée par le bitume dont l'eau de mer eſt imprégnée. Ce n'eſt qu'en vieilliſſant à l'air qu'il perd ces qualités malfaiſantes. C'eſt pourquoi l'on a une grande attention, ſur les lieux, à n'en permettre l'uſage qu'au bout d'un certain tems qui eſt de trois ans pour les plus ſalubres, & de quatre ans pour les autres.

III.

III.

Comment le sel se tire par le secours du feu.

En parlant plus haut de ce sel, j'ai déjà dit qu'on le tiroit des eaux de sources qui n'empruntoient leur salure que du sel gemme caché dans le sein de la terre. Mais ce ne sont pas seulement ces eaux que la nécessité a appris à convertir en sel par le secours du feu. Je vais donc rassembler dans ce chapitre toutes sortes de sels coctiles qui tiennent lieu du sel marin & du sel minéral dans les différens païs du monde où l'on est privé de ceux-ci. C'est pourquoi ce chapitre sera divisé en trois articles dans lesquels j'expliquerai le méchanisme

1°. du sel qui se tire des eaux de sources salées.

2°. du sel qui se tire du sable de la mer lessivé.

3°. du sel qui se tire des cendres de diverses matieres.

Art. I.

Du sel qui se tire des eaux de sources salées.

Lorsqu'on a découvert une source d'eau salée qu'on veut convertir en sel, on commence par s'assurer du degré de salure qu'elle tient. Il y a différens moiens pour le connoître. Le plus simple & le plus sur est de peser cent livres d'eau & de les faire évaporer sur le feu jusqu'à entiere siccité: le degré de salure se compte par la quantité de sel qui se trouve au fond du vaisseau après la cuite. La même épreuve se fait en remplissant de même eau un tube ou cylindre de verre, de bois, ou d'autre matiere, profond de huit pouces & de 15 lignes de diametre. On y plonge une baguette de demi-calibre au bout de laquelle est renfermé un peu de mercure. Cette baguette mise dans l'eau douce va à fond, & fait équilibre, mais dans l'eau salée elle n'entre qu'à proportion du plus ou moins de sel dont l'eau est imprégnée, les parties salines l'épaississant, & faisant résistance à la baguette qui est marquée par degrez comme une échelle mathématique, ce qui fait connoître les degrez de salure de cette eau: mais moins exactement que par l'épreuve du feu: car il est de fait qu'une eau qui don-

donnoit 20 à 22 degrez de sel, épreuve de feu, en ont donné près de 28 épreuve de tube. D'autres n'ont sur cela d'autre regle que de mettre un œuf de poule dans l'eau. S'il y surnage, cela suffit: mais s'il va au fond, ils en concluent que l'eau est trop douce pour en faire du sel.

Il y a des salines où l'on prétend que, si cent livres de leurs eaux ne produisoient pas 18 à 20 livres de sel, la dépense de la cuite en excéderoit le profit. Cependant il y en a grand nombre dont les eaux ne portent que depuis 2 jusqu'à jusqu'à 8 & 10 pour cent. Il s'en trouve même bien au dessous, puisqu'on assure que quand on commença en 1370 à convertir en sel l'eau de la fontaine d'Albano, on ne tiroit de mille livres d'eau qu'une livre de sel. Mais, depuis qu'on a le secret des bâtimens de graduation, on peut fortifier la salure de l'eau & la porter d'un degré & demi jusqu'à dix dans l'espace de 24 heures, pourvu que le tems soit convenable, c'est à dire qu'il soit gai & sec. La graduation est une opération par laquelle on fait évaporer avec le secours de l'air & sans feu plusieurs parties douces de l'eau salée, en l'élevant plusieurs fois au faîte d'un bâtiment disposé suivant l'art, par le moien de plusieurs corps de pompes qu'une eau courante met en mouvement, & la faisant retomber autant de fois de 20 à 25 pieds de haut sur plusieurs étages de fascines. Les bâtimens de graduation ont plus ou moins de longueur à proportion du terrain qu'on a. Mais on leur donne 25 pieds de large & autant de haut à prendre du rès de chaussée jusques sous la sabliere. La masse de fascines qui sont d'épines par où les eaux se filtrent, a 6 pieds de large & occupe toute la longueur du bâtiment & la hauteur depuis le bassin ou la cuve basse jusqu'à la sabliere. L'expérience a fait connoître que les bâtimens à une seule colomne de fascines sont sujets à perdre des portions de sel, en ce que quand il y a beaucoup d'agitation dans l'air les particules d'eau salée dérivant de la perpendiculaire sont emportées hors de leurs divisions. Pour y remédier, on leur donne par le pied la largeur que j'ai dite avec une double colomne de fascines qui n'ont que 18 pieds de large par le haut, mais qui s'accroissant par le bas prennent la forme d'une piramide tronquée. Plus

la disposition de ces bâtimens est parfaite, plus la graduation épargne de dépenses: on doit prendre garde surtout à la forme & aux dimensions qu'on leur donne, élever les eaux avec facilité & peu de frotemens, & connoître précisément le degré de leur salure & la possibilité de les graduer. Les bois deviennent de jour en jour plus rares & plus précieux dans les païs même qui en étoient autrefois les plus abondans. D'ailleurs on peut les employer à d'autres usages qui n'intéressent pas moins les arts & le commerce. Avant qu'on se servît de cette méchanique il falloit 6 cordes ½ de bois pour faire 25 quintaux de sel, & par la graduation 3 cordes ¼ en forment 80. Il en est à peu près de même dans toutes les salines où la graduation est en usage. De plus en procurant la conservation des bois, la graduation donne lieu d'épargner dans la même proportion les fraix de leur transport, ceux de la formation des sels & les autres dépenses qui y sont relatives.

L'eau ainsi graduée parvient après plusieurs passages jusqu'à 25 & 27 degrez de salure. On pourroit la pousser plus loin. Mais l'eau trop raréfiée devient pâteuse, gluante, & coule difficilement par les petits robinets destinés à la répandre en forme de pluye sur les différens étages de fascines qu'elle doit traverser pour arriver à son bassin. Elle se fige, s'y attache, empêche l'effet de l'air & par conséquent de l'évaporation.

Souvent les sources d'où ces eaux proviennent sont fort avant dans la terre, & l'on ne peut les en tirer que par des rouages de différente grandeur lesquels font agir des pompes & des seaux qui puisent les eaux & les rassemblent dans des réservoirs de pierre bien cimentés & dont les uns sont élevés de terre en forme de bassins & les autres pratiqués dans la terre en façon de citernes. Souvent aussi les sources salées se trouvent altérées par des sources d'eaux douces qui en sont voisines; & il faut une extrême attention pour en empêcher le mêlange, ce qu'on fait en les séparant par des sillons qu'on leur trace dans l'argile.

Les

Les eaux falées étant ainfi puifées & préparées par la graduation, on en fait la cuite dans de grandes chaudieres de fer rondes de 15 pouces de profondeur fur 28 à 30 pieds de diametre, où il peut tenir 45 à 50 muids d'eau de 6 quintaux chacun. Le foier du fourneau qui eft au deffus de ces chaudieres eft fait de pierres à l'épreuve du feu & reffemble à une tranchée de 12 à 15 pieds de longueur fur 5½ de large. Les chaudieres ont d'élévation fur leur fourneau 4 pieds ¼ en été, mais on les abaiffe d'un demi pied en hiver à caufe que l'action du feu eft alors moins violente. Les chaudieres fe rempliffent en deux heures par des canaux qui viennent des baffins où l'on conferve les eaux qu'on veut cuire; & pendant ce tems-là on fait grand feu pour arrêter les coulées & faire qu'il fe forme promptement au fond de la poële une efpece de croute nommée équille. Mais comme fans cette équille fouvent l'eau fe fait encore jour, on rompt par le moïen d'un outil tranchant la croute qui couvre la coulée & l'on y jette de la chaux vive détrempée qui l'arrête.

Les trois premieres heures, après que la chaudiere eft remplie, exigent un grand feu & confument environ deux cordes de bois. On prend garde que le bouillon ne furmonte les bords de la poële, & l'on en modere la violence ou avec de la muire froide ou par un morceau de bois qu'on jette du côté où il eft trop impétueux. Car le feu qu'on fait alors eft fi grand que la flamme fortant par la gorge & les foupiraux des fourneaux femble aller réduire en cendres tous ceux qui s'en approchent. Et la muire comme une mer agitée dans ces vaftes chaudieres écume de toutes parts, & pouffe des bouillons femblables aux flots dans la tempête. On y jette de tems en tems certains baffins de fer, afin que l'écume & la craffe du fel que la violence des eaux agitées pouffe au deffus, puiffe fe précipiter au fond de la chaudiere.

Les heures fuivantes, on diminue peu à peu le feu, & quand le fel commence à fe former, il paroît fur la furface de l'eau une crême luifante à peu près comme il arrive fur un baffin de chaux nouvelle-

ment éteinte. Alors on ne jette plus dans le foier que quelques morceaux de bois de tems à autre. On tire à différentes reprises sur les bords de la chaudiere le sel déjà formé afin de donner un écoulement à la muire vers le centre de la poële où le feu se porte principalement. Et ainsi s'acheve la cuite en 12 heures, après lesquelles il reste au fond de la poële 2 à 3 muids d'eau qu'on y laisse jusqu'à la 16 cuite, de sorte qu'après celle-ci on desseche l'équille qui s'est formée, & l'on fait réduire jusqu'à consistance le reste de la muire; puis on laisse refroidir & reposer la chaudiere 24 heures, au bout desquelles on casse l'équille, on la détache, on nettoye la poële, & l'on y fait les réparations nécessaires avant que de la remettre au feu.

Il se tire de chaque cuite plusieurs sortes de sel. Le premier est celui qu'on enleve legérement avec des especes de rateaux sur la superficie, & qui pour sa blancheur, son éclat & sa force, est appellé sel trié. Au dessous de ce sel, est le commun, & il s'en tire encore un troisieme des équilles & matieres salées qui se forment au fond des chaudieres.

Il s'est passé des siecles sans que personne se fut avisé de dissoudre ces matieres pour en extraire le sel, & encore cette invention n'est-elle pas connue partout: du moins n'est-ce que depuis une 30ne d'années qu'elle est en usage dans une des plus anciennes salines de l'Europe. Ces matieres mêlées avec les eaux naturelles des sources salées ne peuvent que les fortifier considérablement, puisqu'il a été prouvé qu'un volume de 5250 liv. fondu & refondu à trois diverses reprises a pu rendre 4572 liv. de sel: ce qui est à raison de $\frac{4}{5}$ & $\frac{1}{3}$. Il est vrai que quelques-uns ont prétendu que ce sel étoit acre, corrosif & pernicieux. Mais l'expérience a fait connoître le contraire. Il est blanc, doux, sain, & ne differe en rien de celui qui est fait avec la muire naturelle toute pure. Peut-être même pouveroit-on qu'il est meilleur, par la raison que la matiere du sel parfaitement pure & dégagée des parties hétérogenes, est la plus pesante dans le liquide & la plus disposée à se précipiter dès que l'évaporation a suffisamment diminué le

le volume d'eau qui la foutenoit & dans lequel elle pirouettoit. En effet le fel dont il s'agit fe trouve de cette nature lorsqu'il a été féparé par la diffolution des enveloppes dans lesquelles il étoit retenu. On brife ces matieres exactement, promptement & à peu de fraix, par le moien d'un moulin fait à peu près de même que ceux qui broyent le ciment ou qui font l'huile. Les équilles y font réduites en poudre, & après qu'on en a tiré le fel jufqu'à épuifement, le réfidu n'eft plus qu'une poudre fi legere par la ténuité de fes parties, qu'elle eft emportée par le cours de l'eau où elle eft jettée, fans y produire d'autre effet que de lui communiquer fur le champ fa couleur blanchâtre.

En général tout fel coctile eft blanc & ne petille presque point au feu, en quoi il différe beaucoup du fel marin. Il y en a d'un goût plus ou moins pénétrant, plus ou moins falant, & quelques-uns qui paroiffent avoir une acreté comme lixivielle, mêlée d'un peu d'amertume. Ce fel diffous dans l'eau de riviere diftillée dépofe une très-petite quantité de félenité, & paffé par le filtre laiffe fort peu de terre blanche en arriere. La diffolution évaporée lentement donne des criftaux cubiques tels que le fel marin les doit donner. Quelques-uns fe feuilletent un peu au commencement de l'évaporation: mais enfin ils donnent auffi des criftaux en cubes lorsque l'on fait noyer exprès ces feuillets pour les rediffoudre, & il ne fe trouve aucune différence entre les criftaux ni pour la figure ni pour les effets. Ce fel pris avant la diffolution & fes criftaux après l'évaporation décrépitent facilement au feu & s'y fondent. Etant mis dans l'eau forte ils en font une eau regale. Mêlés avec l'huile de vitriol, ils donnent par la diftillation un bon efprit de fel, & le réfidu de cette opération diffous, filtré & criftallifé, fournit un fel de glauber bien conditionné. L'efprit retiré de ce fel & mêlé avec quatre parties d'eau forte fait une très-bonne eau régale. Ce même fel, fa diffolution, fes criftaux & fon efprit, précipitent promptement en blanc le vif argent diffous par l'eau forte, ce qui fait la préparation mercurielle qu'on nomme précipité blanc; & étant mis fur de l'argent diffous en eau forte, ils le précipitent en corné ou argent

volatile. Les dernieres portions de leurs dissolutions ne précipitent point l'huile de craie ou de chaux, ce qui est une preuve qu'il ne s'y trouve aucune partie de tartre vitriolé ni d'alcali. Elles ne donnent non plus aucun sel de glauber.

Les réflexions ausquelles cette analyse peut donner lieu parmi ceux qui entendent la chymie, sont que le peu de sélénité & de terre qui se trouve dans le sel coctile ne mérite point d'attention, ces deux matieres n'étant pas nuisibles, & d'ailleurs étant ordinaire que l'huile de tartre par défaillance précipite de tous les sels marins dissous un peu de terre blanche qui leur est comme étrangere. Si ce sel ne donne pas du sel de glauber, c'est qu'il a été bien égouté, car ce n'est que dans l'eau pure ou les égoutes qu'on trouve ce sel qui précipite l'huile de chaux par son acide vitriolique. Et de tout cela l'on peut conclure que le sel coctile est aussi propre pour l'usage œconomique, la chymie & les autres arts, que le sel marin où ces mêmes principes se trouvent.

Art. 2.

Du sel qui se tire du sable marin lessivé.

Il ne me paroît pas qu'il y ait dans le monde plus de deux païs où la méthode de tirer du sel en lessivant du sable de la mer soit connue. L'un est en France dans la province de Normandie, & l'autre au Japon.

Au Japon on enferme un certain espace de terre que l'on remplit de sable fin & net sur lequel on jette de l'eau de mer. On le laisse ensuite sécher & l'on réitere la même chose jusqu'à ce qu'on croie le sable suffisamment imprégné de sel. Alors le tirant on le met dans un cuveau qui a des trous au fonds. On jette encore dessus de l'eau marine: & la laissant filtrer au travers du sable on la reçoit par dessous, après quoi on la fait bouillir jusqu'à une bonne consistance, & le sel qui en sort est calciné dans des pots de terre jusqu'à ce qu'il y devienne blanc & propre à tous les usages où l'on met le sel ordinaire.

En

En Normandie, pour avoir du sable propre à façonner du sel, on choisit une belle greve un peu élevée le long de la côte, & qui soit couverte toutes les nouvelles & pleines lunes depuis l'équinoxe de Septembre jusqu'à celle de Mars. On construit sur le bord de la greve des salines d'environ trois toises tant en long qu'en large supportées par quatre piliers de bois & couvertes de paille. Au milieu de la couverture on laisse un trou qui sert de cheminée, & l'on tire d'une fosse, que l'on ouvre auprès, de l'argile noire avec laquelle en la paitrissant bien on forme des murailles qui montent jusqu'à la couverture. Au milieu de la saline sont construits les fourneaux d'environ un pied de hauteur, & d'un diametre proportionné à celui des plombs, c'est à dire d'environ 27 pouces de long sur 22 de large. Ces fourneaux sont faits de terre paitrie dans l'eau la plus salée qu'on puisse trouver, & l'on est obligé de les rétablir de mois en mois pour éviter une plus grande dépense en bois qu'occasionneroit la cuisson du sel. Les salines étant mises en cet état, on fait amas de fagots & de sablon à proportion des quantités de sel qu'on veut faire. Trois ou quatre jours après que la mer est retirée, s'il fait un tems bien chaud & bien sec, (car c'est ce qu'on demande) on commence par faire provision de sablon & l'on continue d'en amasser jusqu'au mois d'août ou de septembre, par le moien d'une machine à peu près semblable à ces grateresses dont les Jardiniers se servent pour grater & nettoyer les allées des jardins. La planche qui est au bout de cet instrument est de 6 ou 7 pieds de longueur, ferrée d'un côté & attachée à deux bâtons entre lesquels on attache un cheval ou deux qui traînent la machine, tandis que deux hommes sont occupés, l'un à conduire les chevaux & l'autre la machine, comme un laboureur qui conduit sa charrue. Cette machine enleve le sablon de dessus la greve de l'épaisseur de deux pouces, & quand elle est remplie de sable, on la leve pour la faire passer par dessus ce tas de sablon, pour en faire d'autres dans toute l'étendue de la greve. On les enleve ensuite & on les voiture dans de petits tombereaux auprès de la saline, le plus diligemment qu'il est possible de peur de la

pluye.

pluye. Là ce sable est mis en monceaux arrondis qu'on bat, à coups de pilon autant qu'on peut, pour empêcher que la pluye ne les fasse ébouler ou ne les dessale. Il y a tels de ces monceaux qui contiennent jusqu'à 200 journées de tombereaux qui font chacun 20 à 25 voyages par jour. Lorsqu'on veut faire du sel, on prend de ce sablon que l'on met dans un quarré fait de 4 planches de chêne ou de hêtre de 7 pieds de longueur sur 1 de large & 2 pouces d'épaisseur, on les assemble par les bouts en forme de pressoir d'un pied de profondeur, foncé par dessous d'autres planches qui ne sont pas tout à fait jointes, afin que l'eau puisse s'écouler au travers du sable, en emporter les parties salines & tomber sur un autre plancher à quatre doigts plus bas, & construit d'une sorte de terre glaise qu'on bat comme on fait l'aire d'une grange, ce qui fait une plateforme unie & impénétrable à l'eau qui se rend de là dans une goutiere de la grosseur du bras, d'où elle est portée dans des tonneaux qui sont dans la saline pour pouvoir être mise dans les plombs qui sont sur les fourneaux à mesure qu'on ôte le sel de chaque bouillon, sans quoi ces plombs fondroient.

Avant que de jetter le sable dans le quarré de planche dont j'ai parlé, on en garnit le fond d'une couche de longue paille, de l'épaisseur de deux doigts. Et le sable y étant jetté ensuite, on le foule avec les pieds le plus qu'il est possible. Puis on l'arrose d'eau douce qui est la meilleure, ou à son défaut d'eau salée qui est une heure ½ à pénétrer le sablon, & à se rendre aux tonneaux de la saline dans l'un desquels on la fait couler tant qu'on s'apperçoit qu'elle est salée; & quand elle ne l'est plus suffisamment, on la fait aller dans un autre tonneau pour la mêler avec d'autre eau plus salée, ou pour la faire passer une seconde fois sur le sablon.

On connoît quand l'eau est bonne à faire du sel, par le moien d'une espece d'écuelle de bois carrée de la grandeur de la main qu'on remplit d'eau salée, dans laquelle on jette une petite boule de cire semblable à une cerise, qui renferme quelques petits morceaux de plomb

qui

qui la rendent assez pesante pour pénétrer l'eau douce & aller au fond, mais en même tems assez legere pour faire résistance dans l'eau salée à proportion des parties de sel qui s'y trouvent.

L'eau ainsi éprouvée se met dans les plombs qui sont faits en forme de moules à biscuit, longs d'environ 27 pouces & larges de 22 sur 3 de profondeur. On fait du feu dessous, & dès que l'eau commence à bouillir on ôte l'écume qu'elle pousse en abondance, & à mesure qu'elle diminue on y remet d'autre eau que l'on continue aussi d'écumer. Après cela venant à s'épaissir on la remue continuellement avec un bâton large & recourbé par un bout. Le feu est continuel sous les plombs, très-grand d'abord jusqu'à ce que l'eau bouille, moindre ensuite jusqu'à ce que le sel soit formé, mais plus fort après cela jusqu'à ce qu'il soit parfaitement cuit: alors on l'enleve avec la pelle pour le mettre dans des paniers faits en ruches où il s'égoute & se seche en une heure ½ ou deux, au bout desquelles on le renverse dans un coin de la saline proprement balayé, & il y reste jusqu'à ce qu'on le vende.

D'un soleil à l'autre on peut faire jusqu'à 13 bouillons dans chaque plomb, & chaque bouillon de 9 à 10 livres; ce qui fait environ 117 livres pesant de sel toutes les 24 heures pour le travail de chaque plomb qui consume en été environ 10 fagots & en hyver 12 ou 13 dont 7 à 8 font la charge d'un cheval. Mais il faut interrompre tous les jours le travail de ces plombs pour les rebattre, & les refondre de tems en tems.

Ce sel est extrémement doux, mais n'a aucune mauvaise qualité.

Art. 3.

Du sel qui se tire des cendres de diverses matieres.

Il n'y a que les habitans du roiaume d'Asem aux Indes Orientales que la nécessité ait contraints à faire de ce sel au défaut de tout autre. Voici dequoi il est composé.

Ils prennent de ces grandes feuilles de la plante qu'on nomme aux Indes figuier d'Adam. Ils les font ſécher, & après les avoir fait brûler, les cendres qui en reſtent ſont miſes dans l'eau qui en adoucit l'âpreté. On les y remue pendant 10 à 12 heures, après quoi l'on paſſe cette eau au travers d'un linge & on la fait bouillir. A meſure qu'elle bout, le fond s'épaiſſit, & quand elle eſt conſumée, on y trouve pour ſédiment au fond du vaſe un ſel blanc & aſſez bon.

Ce ſel eſt celui des riches, bien différent de ce qu'on appelle en ce païs-là le ſel des pauvres. Pour faire celui-ci, on ramaſſe l'écume verdâtre qui s'éleve ſur les eaux dormantes & en couvre la ſuperficie. On fait ſécher cette matiere, on la brûle, & les cendres qui en proviennent étant bouillies, il en vient une eſpece de ſel dont le commun du peuple ſe ſert à tous les uſages où nous employons les nôtres.

EXPÉRIENCES CHYMIQUES

SUR

L'ESPECE DE TERRE CONTENUE DANS LA DERNIERE LESSIVE MERE QUI RESTE DU SEL COMMUN; LAQUELLE TERRE FAIT LA BASE DE LA PIERRE SERPENTINE,

PAR M. MARGGRAF.

Traduit de l'Allemand.

I.

J'ai déjà rapporté & décrit d'une maniere distincte dans d'autres Mémoires, comment l'espece de terre dont il s'agit ici, peut être séparée, tant de la pierre serpentine que de la derniere lessive incristallisable, dite *Mutter-Sohle*, qui reste de la préparation du sel commun. J'ai ajouté après cela que cette terre étoit parfaitement la même, soit qu'elle fût tirée de la pierre serpentine, soit qu'on la retirât de la lessive du sel commun, & qu'on pouvoit en toute sureté employer indifféremment l'une à la place de l'autre dans les Expériences.

II. J'ai dit aussi alors que bien des Chymistes prenoient la terre en question pour une terre calcaire, mais qu'elle l'étoit aussi peu que la terre d'alun. Ses propriétés ne permettent de la rapporter ni à l'une ni à l'autre de ces deux terres. Elle est manifestement alcaline; car elle absorbe les acides fort promptement, & s'en saoule; mais les produits qui en résultent, n'ont pas la moindre affinité avec ceux que donne le mêlange des acides, tant avec la terre calcaire qu'avec celle d'alun. Quoique j'aye dévelopé tout cela ailleurs, je crois cependant que, pour mettre plus de liaison dans mes réflexions, il convient de le répéter ici.

III. La terre dont nous parlons, eſt diſſoute promptement par les trois acides du regne minéral; & cela

1. Avec l'acide du vitriol. Ici, après la ſaturation faite, il ſe criſtalliſe un ſel moyen, amer & qui ſe diſſout aiſément dans l'eau; il reſſemble à tous égards aux ſels purgatifs des ſources minérales qu'on nomme ſels amers. Au contraire, les terres calcaires donnent toujours avec cet acide une maſſe ſélénitique, inſipide, qui a de la peine à ſe diſſoudre dans l'eau; & de l'union de la terre d'alun avec le même acide réſulte toujours un véritable alun.

2. Avec l'acide du ſalpetre: notre terre eſt pareillement fort vîte & entierement diſſoute par cet acide, donnant, après l'entiere ſaturation convenable, un ſel qui, au premier coup d'oeil, ne differe point du ſalpetre; mais qui, expoſé à l'air, au lieu de demeurer ſec comme le ſalpetre, s'y fond. Cet acide agit tout autrement ſur cette terre que ſur la terre calcaire & ſur celle d'alun. En effet, la premiere par la calcination donne un phoſphore de Balduin, tandis que la ſeconde, à l'action d'un feu véhément, laiſſe entierement échaper l'acide du nitre; ce que fait auſſi à la vérité notre terre: mais, ce en quoi elle ſe diſtingue des deux autres, c'eſt que, lorſqu'on trempe un papier dans une ſolution de cette terre dans l'acide du nitre, affoiblie avec de l'eau, & qu'après l'avoir fait ſécher on l'allume, il brûle avec une flamme verte; ce qui n'a point lieu avec les ſolutions de la terre calcaire & de la terre d'alun.

3. Avec l'acide du ſel commun: notre terre y ayant été diſſoute juſqu'à la ſaturation, il en réſulte un mixte qui ſe retrouve parfaitement ſemblable à la leſſive mere de ce ſel, & qui, après avoir été deſſéché, attire l'air & ſe fond. En diſtillant ce mixte à un feu véhément, il laiſſe échaper ſon acide, tout comme la terre d'alun ſaoulée du même acide; au lieu que la terre calcaire le retient ſi fortement, que la plus forte incandeſcence ne ſauroit en faire ſortir quoi que ſoit, le cas étant le même que celui du ſel ammoniac fixe.

IV. Notre terre ſe laiſſe auſſi diſſoudre par les acides des végétaux, dont le plus pur eſt ſans contredit un bon vinaigre diſtillé.

Un

Un semblable vinaigre, concentré par le froid, dissout notre terre avec un bruissement, & en absorbe une bonne quantité pour sa saturation. Cette solution ainsi saoulée, étant ensuite délayée avec un peu d'eau, filtrée & évaporée, refuse de se cristalliser; mais, si on la laisse dessécher tout doucement par l'évaporation, il demeure une matiere, comme une gomme arabique, & à la fin il se fond tout à fait. Au contraire la terre calcaire avec cet acide donne des cristaux. Au reste les produits du mélange de notre terre avec le tartre ressemblent à ceux que nous avons rapportés ailleurs comme résultant de celui de la terre d'alun avec le sel végétal impur. Notre terre, tout comme les terres calcaires dispose aussi ce sel acide, je veux dire le tartre, à livrer sa partie alcalino-saline à l'acide du nitre, & à devenir avec lui un véritable nitre. Voyez mes Ecrits Chymiques, Tom. I. p. 186. §. 24.

V. L'acide des fourmis, purifié par la distillation, & concentré par le froid, dissout promtement notre terre tout entiere avec une forte effervescence; &, quand, après l'entiere saturation de l'acide, ce mixte filtré est disposé par l'évaporation à la cristallisation, il se forme de petits cristaux presque cubiques, qui n'ont gueres de goût, qui se dissolvent avec peine, même dans une grande quantité d'eau chaude, & qui, au lieu de se fondre sur des charbons ardens, tombent en poussiere. Au contraire, les cristaux produits par cet acide avec la terre calcaire sont allongés; & la solution de la terre d'alun avec le même acide ne se cristallise point du tout, & donne après l'évaporation une masse que l'air rend gluante.

VI. Le mélange de l'acide du phosphore avec notre terre m'a donné les phénomenes suivans. Je pesai une dragme de cet acide du phosphore concentré, je la mis dans un verre à large col, je la délayai avec trois parties d'eau distillée; ensuite j'y jettai peu à peu une demi-dragme de notre terre bien broyée dans un mortier de verre; & à mesure que je mis cette terre, il se fit une forte effervescence. La terre fut dissoute, & même avec quelque incalescence, après que la demi-dragme entiere de sel eût été employée; la solution étoit encore pure & claire; mais, dès que j'y eûs ajouté cinq grains de la

 même

même terre, & que j'eûs bien remué ce mêlange, le tout reprit une forte efferveſcence, & perdit ſa limpidité & ſa liquidité; puis, s'épaiſſiſſant peu à peu, il ſe forma de petits criſtaux. Là deſſus je délayai ce mêlange avec de l'eau diſtillée, je le filtrai, & ayant ſéparé la liqueur claire, j'y jettai ſucceſſivement dix grains de notre terre broyée. L'acide du phoſphore étant pleinement ſaoulé, il ne ſe fit plus aucun bruiſſement. Cependant je le délayai encore une fois avec de l'eau chaude, je le filtrai; je verſai ſur les criſtaux qui étoient reſtés tant à la premiere qu'à la ſeconde filtration de l'eau diſtillée tiede, à pluſieurs repriſes, continuant auſſi longtems juſqu'à ce que l'eau qui s'écouloit, ne ſouffrit plus de précipitation avec la ſolution de ſel de tartre; après quoi je fis évaporer tout le liquide qui avoit paſſé par le filtre, pour le diſpoſer à la criſtalliſation. Pendant l'évaporation il ſe forma de petits criſtaux, qui, après l'humidité écoulée & le deſſéchement, peſoient dix-huit grains. Le peu d'humidité, qui s'étoit écoulée, ayant ſubi une nouvelle évaporation, j'en tirai un peu de ſubſtance ſemblable à de la gomme, qui devenoit promtement humide à l'air, & ſe diſſolvoit aiſément dans l'eau. Cette matiere viſqueuſe étant délayée, il ſe précipitoit à l'inſtant, par le moyen d'une ſolution de ſel de tartre, beaucoup de cette terre dont il eſt queſtion dans ce Mémoire. Il faut remarquer que les réſidus criſtallins qui étoient demeurés dans les deux filtres, après avoir été bien édulcorés & deſſéchés, peſoient exactement une demi-dragme.

VII. Comme je me rappelle qu'en rapportant les expériences que j'ai faites ſur la terre d'alun, je n'ai pas parlé de ce qui réſulte de ſon mêlange avec l'acide du phoſphore, je crois qu'il ne ſera pas déplacé d'en parler ici, pour mieux faire connoître la différence entre notre terre & la terre d'alun.

Ayant pris une dragme de l'acide du phoſphore que je délayai avec un peu d'eau, j'y jettai ſucceſſivement quarante cinq grains d'une terre d'alun édulcorée & deſſéchée au mieux: la ſolution de cette terre ſe fit ſans la moindre efferveſcence, à la reſerve d'un petit mouvement presque imperceptible & d'un peu de chaleur qui ſe fit ſentir

tout

tout à la fin. Je mis ce mixte en digestion; & au bout de quelques heures, je versai dessus un peu d'eau distillée chaude, pour le délayer; après quoi je le fis passer par un filtre de papier brouillard; & quand la liqueur claire fut écoulée, je la mis dans un verre sur du sable chaud pour la faire évaporer. Je remarquai pendant l'évaporation, qu'il se précipitoit une poudre presque saline, qui, ayant été séparée du liquide, pesoit après le desséchement deux grains. Je fis évaporer totalement le reste du liquide; il n'y eut plus rien de trouble, & il ne tomba plus de poudre. Après l'entiere évaporation de toute l'humidité, je trouvai de nouveau un mixte qui ressembloit à la Gomme arabique. Ce mixte délayé dans l'eau laissoit précipiter un sédiment par le moyen de la solution des sels alcalis, tant fixes que volatils. Ce qui étoit resté de ce travail dans le filtre, après avoir été édulcoré au mieux avec de l'eau chaude & desséché, pesoit exactement encore quarante cinq grains, comme le poids complet de la terre d'alun, & néanmoins pendant l'évaporation il s'en étoit précipité deux grains, & il en étoit resté encore une portion dissoute dans le liquide; de sorte qu'il faut qu'il soit entré quelque chose de l'acide du phosphore dans la terre d'alun.

VIII. Notre terre, quand elle a été précédemment calcinée, sépare à la vérité la partie urineuse du sel ammoniac, comme le font les terres calcaires calcinées; mais, comme l'acide du sel armoniac, qui n'est autre que l'acide salin, rencontre ici une terre différente de la terre calcaire, & que notre terre a pour propriété de laisser échaper les acides salins, lorsqu'elle est exposée à l'action d'un feu véhément, la partie urineuse se saoule de nouveau de cet acide, & par conséquent un nouveau sel armoniac est tout aussitôt régénéré.

En effet, ayant pris deux parties de notre terre, qui avoit souffert auparavant une forte calcination, & les ayant mêlées avec une partie de sel armoniac pulvérisé, il s'éleva une odeur volatile urineuse, comme celle que donne d'abord le mélange de la chaux vive avec le salmiac. Je mis ce mixte dans une retorte avec un récipient adapté & luté; & l'ayant distillé d'abord à un feu doux, il s'éleva un peu de sel

sel

sel volatil urineux, en partie par gouttes, en partie sous une forme seche. J'adaptai un autre récipient & j'augmentai le feu: alors il monta une bonne quantité de sublimé sous la forme de vapeurs blanches, lequel mêlé à une lessive alcaline fixe, laissa échaper l'urineux, de sorte qu'il n'étoit plus que du salmiac. Ensuite il sortit encore un peu d'acide de sel, dont une petite partie demeura encore attachée à cette terre en poudre qui étoit restée au fond de la retorte. Car, ayant lessivé ce résidu, il donna une liqueur qui se précipitoit fortement avec l'huile de tartre par défaillance. Si on laisse évaporer doucement cette lessive filtrée, sans y jetter de sel alcali, il se forme à la vérité des cristaux au froid, mais qui se fondent aussitôt après.

IX. Une forte calcination ne met pas notre terre dans le cas de s'échauffer ensuite avec l'eau, comme le font les terres calcaires. En effet, de deux dragmes de cette terre que j'avois tenue une heure & demie dans un creuset fermé, exposé à un feu véhément, il ne demeura que cinquante grains, qui ne donnerent absolument aucune chaleur avec l'eau; & en faisant bouillir dans de l'eau de cette même terre ainsi calcinée & mêlée avec du sel alcali, elle ne prit aucune qualité caustique; ce que fait pourtant toujours la terre calcaire après sa calcination. Cependant elle paroit dissoudre en quelque maniere le souffre, lorsqu'on en fait bouillir deux parties avec une partie de souffre dans de l'eau distillée, vû qu'après cela la lessive filtrée de cette decoction paroit jaunâtre, & qu'en y versant du vinaigre elle souffre une précipitation qui est cependant beaucoup plus foible, & accompagnée d'une odeur d'oeufs pourris, bien moindre que quand ce travail s'exécute avec de la chaux & du souffre.

X. J'ai encore mêlé notre terre avec parties égales de sel de tartre fixe bien sec, j'ai couvert ce mélange, & je l'ai calciné longtems & avec force, sans qu'il se fondit le moins du monde ensemble. Je l'ai ensuite lessivé avec de l'eau distillée; & après la filtration & quelque évaporation, la lessive ne s'est point trouvée caustique, comme elle le devient toujours par le mélange de la chaux & du sel de tartre.

tre. Si l'on continue l'évaporation de cette lessive, on obtient des cristaux, mais qui se fondent bientôt à l'air.

XI. Quand on mêle deux parties de notre terre avec une partie de souffre, & qu'on les sublime dans une retorte de verre jusqu'à une entiere incandescence, le souffre monte presque sans aucun déchet sensible & s'éleve n'ayant souffert aucune altération. Ce qui reste de ce travail étant lessivé, & la lessive un peu concentrée par l'évaporation, le vinaigre en précipite à la vérité quelque chose, mais fort peu & sans aucune odeur perceptible. Il en arrive autant lorsqu'on mêle deux parties de cette terre avec une partie de cinnabre pilé fort fin, & qu'on les sublime d'une retorte de verre; car alors le cinnabre monte dans tout son poids, sans altération ni révivification; circonstances qui sont toutes différentes de ce qui arrive avec la chaux; le résidu est à tous égards dans le même cas que celui du mêlange avec le souffre.

XII. En mêlant bien parties égales de tartre vitriolé, & de notre terre, ce mêlange travaillé dans un creuset fermé à un feu véhément, on trouve que ce qui reste n'est point fondu, & qu'il est à peine un peu cuit. Si ensuite on lessive avec de l'eau chaude, & qu'après la filtration on le dispose par l'évaporation à la cristallisation, on retrouve le tartre vitriolé dans toute sa pureté, & la terre non altérée demeure dans le filtre. De même, si l'on mêle parties égales de salpêtre ou de sel commun avec notre terre, qu'on distille chacun de ces mêlanges à part à un feu véhément, ces sels ne souffrent pas la moindre altération, & on les recouvre tels qu'on les avoit employés, en lessivant le résidu & en procédant comme ci-dessus.

XIII. J'ai déjà parlé dans d'autres endroits de la lessive-mere incristallisable du sel commun, & j'ai dit que cette terre pouvoit en être précipitée, aussi bien que de ses solutions faites avec d'autres acides, au moyen de l'esprit de sel ammoniac, mais qu'en continuant à y en verser davantage, il rentroit en solution. Cela m'a engagé à mêler notre terre auparavant précipitée, avec un sel alcali fixe, & ensuite édul-

édulcorée au mieux avec de l'eau, à la mêler, dis-je, avec un esprit de sel armoniac bien pur, pour voir ce qui en arriveroit.

Je mêlai donc une dragme de notre terre bien broyée avec trois onces d'un esprit de sel armoniac assez fort qui avoit été préparé avec le sel de tartre: je mis ce mêlange dans une retorte de verre proportionnée, & après y avoir adapté & luté le récipient, je mis ce vaisseau à distiller dans une coupelle de sable; tant que le tout demeura froid, je n'y remarquai pas le moindre mouvement; mais, dès qu'il eût acquis un peu de chaleur, ce mêlange se mit à bouillir en poussant des bulles avec assez de force, & l'esprit de sel armoniac laissa échaper son sel volatil qui monta dans le récipient sous une forme seche. Je continuai la distillation jusqu'à ce que ce sel eût été dissous de nouveau par l'humidité qui s'éleva ensuite. Le mêlange continua de bouillir aussi longtems qu'il s'y trouva du sel volatil, après quoi je le laissai réfroidir, & ayant délayé avec de l'eau chaude ce mêlange encore humide dans la retorte, je le versai sur un filtre de papier brouillard, je concentrai par l'évaporation la liqueur qui s'en étoit écoulée; j'essayai si l'on pouvoit y effectuer la précipitation tant avec les sels acides qu'avec les alcalis, mais je ne pûs rien découvrir. Là dessus j'édulcorai au mieux ce qui étoit resté dans le filtre, je le fis sécher, & je retrouvai exactement le poids de ma terre, savoir une dragme. Bien qu'on ait lieu de conjecturer d'après cet exposé, qu'il ne s'est fait ici aucune solution ni aucun changement de notre terre, cependant l'ébullition qui dura aussi longtems que le sel volatil du sel armoniac s'y trouvoit, est digne de remarque; & il vaudroit bien la peine de rechercher si & jusqu'à quel point la terre demeurée dans le filtre a été altérée par l'esprit de sel armoniac. Mais le tems ne m'a pas encore permis de m'occuper de cet examen.

XIV. J'ai encore traité notre terre avec le borax à un feu véhément; & voici ce que j'ai trouvé. Parties égales de borax calciné, c'est à dire, dégagé de toute l'humidité qui pouvoit y rester, & de notre terre, bien mêlées ensemble, & tenues pendant une heure dans un creuset de fusion à un feu véhément, ont été réduites à une telle

fu-

fusion que tout a passé à travers le creuset, sans que rien y soit resté. Pour prévenir cette extreme fluidité, j'ai mêlé parties égales de borax calciné, de notre terre, & de caillou pilé bien menu; & ayant travaillé ce mêlange au même feu de fusion; j'ai trouvé dans mon creuset une très belle masse de verre couleur de topase, que le caillou sans le borax, mêlé avec parties égales de notre terre, ne sauroit produire, puisqu'au feu le plus violent il ne reste de ce dernier mêlange qu'un mixte en poussiere qui ne s'est point cuit ensemble.

XV. Parties égales de notre terre & de chaux fusée, mêlées ensemble & travaillées comme dans le §. précédent au creuset de fusion, ne se fondent pas ensemble; elles demeurent une substance en poussiere qui ne s'est point cuite. Au contraire, la terre d'argille avec la nôtre se cuit déjà un peu au feu; car, ayant pris de l'argille d'Hirschberg bien pulvérisée & exactement lavée, parties égales avec notre terre, le tout bien mêlé, & humecté avec de l'eau pour en former une pâte, dont je fis une petite plaque, le tout, après le desséchement, étant traité dans un creuset fermé à un feu véhément de fusion, de la maniere qui a été souvent indiquée, j'en obtins une masse qui ressembloit à de la craye compacte, & qui par conséquent n'étoit pas fort aisée à rompre.

XVI. Le flus-spath de Freyberg qui porte le nom du Prince Electoral Fréderic Auguste, & qui a été précédemment calciné, (espece de pierre de laquelle j'ai dit ailleurs qu'elle ressembloit parfaitement à la pierre de Bologne,) mêlé à parties égales avec notre terre, & forcé au feu de fusion dans un creuset fermé, donna un mêlange qui ne se fondit en aucune maniere, & qui, à en juger par les apparences, ne souffrit aucun changement; néanmoins il me semble que notre terre avoit éprouvé quelque altération, vû que ce mixte ne prit plus d'effervescence avec aucun acide, comme il le faisoit avant la calcination. Au reste, ce flus-spath, quant à sa composition, est un produit de l'acide du vitriol & de la terre calcaire: c'est ce que j'ai prouvé bien clairement dans une dissertation sur la nature de cette pierre, qui se trouve dans les Mémoires de l'Académie.

XVII. Il en eſt tout autrement de l'eſpece de flus-ſpath qu'on trouve en abondance à Stolberg dans le Harz, auſſi bien qu'en divers autres endroits. Elle eſt de toutes ſortes de couleurs, & l'on s'en ſert beaucoup dans les mines pour les travaux de la fuſion. Cette eſpece de pierre eſt encore connue ſous les noms de *Pſeudo-Smaragdus*, *Pſeudo-Hyacinthus*, & *Pſeudo-Amethyſtus;* & je me ſuis convaincu par ma propre expérience que c'eſt le véritable *Petun-ſe* des Chinois. Comme je travaille à un Mémoire ſur cette ſorte de pierre, l'une des plus curieuſes, je n'en dirai ici que ce qui ſe rapporte à mon ſujet; ſavoir, qu'après avoir été calcinée & réduite à une fine pouſſiere, ſi on la mêle à parties égales avec notre terre, & qu'on mette ce mixte dans un creuſet couvert au feu de fuſion, il entre dans une ſi grande fuſion que tout paſſe à travers le creuſet, qui devient ſemblable à une ruche d'abeilles. Mais, quand à des parties égales de notre terre & de cette pierre, on ajoute une partie de cailloux pilés bien menu, & qu'on traite le tout à couvert au feu de fuſion, il reſte dans le creuſet un beau verre clair, couleur de chryſolithe, qui a quelques rayes blanches.

XVIII. Deux parties de notre terre avec une partie de régule d'arſenic, étant ſublimées dans une retorte de verre, il ſe trouve qu'en donnant à la fin un feu véhément, l'arſenic reprend ſa forme métallique, & monte avec tout ſon poids ſans avoir ſouffert aucune altération. On n'en remarque point non-plus dans la terre qui reſte. La même choſe arriva en mettant deux parties de terre avec une partie d'orpiment ſublimé, & en les travaillant de la même maniere. Ni la terre, ni l'orpiment, ne furent changés; & celui-ci s'éleva ſous ſa forme ordinaire & avec tout ſon poids.

XIX. Dans mes Ecrits Chymiques, en parlant des effets du ſel alcali du ſel commun ſur le régule d'antimoine, j'ai rapporté que quatre onces d'antimoine étant fondues avec cinq dragmes de craye, il ſe détachoit une portion de régule d'antimoine. Cela n'arrive pas avec notre terre; car, ayant eſſayé de fondre enſemble à couvert cinq onces d'antimoine avec cinq dragmes de cette terre, j'ai trouvé que mal-

malgré la fusion parfaite où le tout étoit entré, il ne s'étoit point formé de régule. La raison manifeste en a été indiquée §. XI. c'est que le souffre s'attache plus volontiers à la terre calcaire qu'à la terre de la lessive-mere du sel commun.

XX. J'ai pris du verre de plomb fait de quatre parties de minium, & d'une partie de cailloux; seul il se fond assez bien, mais mêlé avec parties égales de notre terre, il ne s'est point fondu à un feu véhément; il s'est seulement un peu cuit par en-bas, & il a fortement vernissé le creuset. La même chose est arrivée avec un verre de plomb arsénical, fait de deux onces de minium, d'une once de cailloux, & d'une demi-once d'arsenic.

XXI. J'ai encore essayé les effets de notre terre, lorsqu'on la soumet aux procédés que Mr. de Réaumur a suivis pour faire de la porcelaine avec du verre commun, au moien de la cémentation. J'ai pris pour cet effet des morceaux de vitres communes, je les ai bien entassés avec notre terre, couche par couche, dans un creuset fermé; j'en ai procuré la cémentation à un feu modéré pendant une heure; &, après le réfroidissement, j'ai trouvé que la terre avoit pénétré le verre assez profondément, & qu'il s'en étoit formé un mixte de porcelaine, presque aussi bonne que la porcelaine de verre de M. de Réaumur. Je pris ensuite du verre de vitres communes bien pulvérisé & lavé; j'en mêlai trois parties avec une partie de notre terre, je travaillai le tout à un feu véhément de fusion dans un creuset couvert; après quoi je trouvai que ce mêlange ne s'étoit pas à la vérité fondu, mais seulement cuit. Je pilai ce mixte dans un mortier de verre & le réduisis à une poudre très fine; j'y ajoutai encore une dragme de verre commun lavé, mêlant bien le tout, de quoi j'obtins une masse qui s'étoit fondue entierement ensemble, & qui ressembloit à de la porcelaine. Frappée contre l'acier, elle rendoit des étincelles. Mais, ayant mêlé vint grains de notre terre avec trois dragmes de ce verre commun lavé, deux grains de *crocus Martis*, & un grain de *crocus Veneris*, & travaillé le tout à couvert pendant deux heures au feu de fusion, j'obtins une masse vitreuse, semblable au chrysolithe foncé.

XXII. Ce qu'on nomme les fleurs de zinc, c'est à dire la chaux de zinc bien préparée, mêlées à parties égales avec notre terre, & exposées à l'action d'un feu véhément dans un creuset fermé, n'entrent point en fusion; il ne s'en cuit même rien, & la couleur n'éprouve aucun changement.

Mais un mélange de deux parties de notre terre avec deux parties de cailloux pilés bien fin & lavés; une partie de fleurs de zinc, quatre parties de borax calciné, & une de salpetre pur, se fond à un feu véhément en une masse opaque d'un jaune verdâtre. Au contraire, en mêlant deux parties d'argille de Hirschberg lavée avec trois parties de cailloux, & une partie de notre terre, le tout étant réduit en pâte avec de l'eau, le travail susdit en fait une masse de porcelaine, mais qui est fort poreuse: & en y ajoutant seulement une très petite quantité du flus-spath de Stollberg, le tout se fond en une masse jaunâtre & spongieuse. Il resteroit encore bien des expériences à faire avec notre terre; mais il faut les renvoyer à un autre tems, les circonstances où je me trouve actuellement ne me permettant pas d'y vaquer. Il suffit seulement d'avoir mis hors de tout doute, que notre terre n'est, ni calcaire, ni alumineuse, ni d'aucune des autres especes de terres absorbantes connues; &, si la providence le permet, je pourrai encore indiquer bien d'autres alcalines qui different pareillement de la nôtre.

CONSIDÉRATIONS

SUR

LA MULTIPLICATION PRÉCOCE DES ABEILLES, RETROUVÉE DEPUIS QUELQUES ANNÉES DANS LE MARGGRAVIAT DE LUSACE, ET QUI AVOIT DÉJA ÉTÉ EMPLOYÉE PAR LES ROMAINS A MULTIPLIER LES ESSAINS TROP DIMINUÉS.

PAR M. GLEDITSCH.

Traduit de l'Allemand.

A quelque point que puisse aller la force naturelle de se multiplier que possedent les Insectes, & quelqu'excessive que soit leur propagation & l'accroissement de leur nombre qui en résulte; leur destruction ou décroissement peut aussi sans contredit être poussé tout aussi loin, tant par les voyes naturelles que par celles qui ne le sont pas: mais, quoique ce décroissement arrive suivant des proportions qui sont exactement déterminées dans l'ordre de la nature, & qui même doit arriver alternativement; nous ne pouvons jamais le découvrir entierement dans les especes. Il est aisé qu'il aille en augmentant ou en diminuant, rélativement à la diversité des situations, des saisons, & de la nourriture, soit dans des contrées & païs particuliers, soit tout à la fois sous divers climats, comme on le voit de même dans la fécondation des Insectes, qui est quelquefois diminuée, troublée, arrêtée même & entierement détruite. Autant que ces variations sont réelles & importantes dans la grande oeconomie de la Nature où elles ont leurs fondemens; aussi peu paroit-on jusqu'ici les avoir bien comprises, & en avoir fait tout le cas qui leur convient. Où sont ceux qui se mettent en peine, si

ces

ces insectes tant grands que petits existent dans leur quantité ordinaire, ou sont moins nombreux, pourvu qu'il n'arrive à cet égard rien de trop sensible & de tout à fait extraordinaire? On croit perdre sa peine & son tems d'apprendre à connoitre de semblables créatures; d'étudier à fond leurs propriétés, & d'appliquer au bien public les découvertes utiles qui peuvent être faites dans ce genre: tout cela est trop bas pour des gens qui se piquent d'un goût fin & de délicatesse d'esprit. Il n'est pas besoin de prouver que, dans des tems aussi éclairés que les nôtres, on ne laisse pas de penser de cette maniere sur diverses parties des sciences naturelles qui tiennent pourtant les principales places dans la grande doctrine de la Nature. Peut-être qu'on seroit tenté de les condamner à retourner à leur état primitif, à celui où elles étoient dans les tems de l'origine la plus reculée. On ne sauroit pourtant dire que cette façon de penser soit devenue universelle.

Dans certaines contrées & certaines années le trop grand accroissement des insectes peut avoir des suites fâcheuses, qui ne se bornent pas à causer quelques incommodités, ou dommages, mais qui sont d'une beaucoup plus grande conséquence par rapport à nous que tous les autres accidens qui naissent de là en même tems. Mais, d'un autre côté, quand il ne viendroit à manquer que la quantité accoutumée des insectes que diverses contrées reconnoissent leur appartenir en propriété & en égalité dans un certain ordre, ce défaut de quelques especes, dont il semble d'abord qu'on ne doive pas faire grand cas, ne laisseroit pas de causer des effets, qui, tant par leur singularité que par le préjudice qui en résulteroit, exciteroit bien plus l'attention & les plaintes des habitans, que n'avoient jamais été capables auparavant de se faire les causes auxquelles tient le défaut en question.

Toutes les especes d'insectes dont divers cas particuliers ont procuré de côté & d'autre la connoissance avant celle des autres especes, ont été envisagées d'une maniere qui a engagé à les rapporter à deux classes générales, que la plûpart des hommes regardent comme exactes & bien fondées. Le premiere est celle des insectes bons & utiles, qui peuvent en effet, rélativement à certaines vues contribuer

plus

plus ou moins à notre profit, ou notre plaisir, ou du moins qui sont censés y contribuer. On s'imagine que c'est là précisément leur destination, telle que la Nature se l'est proposée. L'autre classe générale comprend tout le reste des insectes, tant ceux qui sont inconnus que ceux qu'on estime desagréables, incommodes ou nuisibles, avec fondement ou sans raison. Les hommes appellent ceux-ci les Insectes inutiles & pernicieux; & suivant leurs idées ils sont superflus. Affirmer que leur existence est au contraire d'une vraye nécessité dans la Nature, c'est tenir un langage qu'ils trouvent extravagant ou incompréhensible.

En partant de là, les gens qui pensent ainsi, souhaitent uniquement la multiplication des insectes qui leur plaisent, ou dont ils retirent quelque utilité. Ils y travaillent même autant que cela dépend d'eux; & si le succès répondoit à leurs desirs, il faudroit que cet accroissement devint d'une grandeur inexprimable. D'un autre côté, ils ont juré une guerre implacable à tous les autres insectes, & ils jugent que c'est rendre un bon service à la nature, qui, à leur avis, a commis une lourde méprise en les produisant & en les multipliant.

Cependant, si nous connoissions mieux les insectes, & que nous les eussions à notre commandement aussi bien que les tempêtes, cela nous mettroit en état d'influer à notre gré sur quantité de circonstances importantes de l'agriculture & de l'oeconomie domestique; ce à quoi nous ne parviendrons jamais, parce que nous nous trouvons réduits à laisser nos meilleurs arrangemens à la merci des tempêtes & des insectes. Quand nous avons tout fait, il ne reste rien pour nous que l'espérance du plus heureux succès de nos mesures; &, à l'égard des insectes, le privilege de gouverner & de multiplier quelques especes particulieres & d'en profiter à notre gré, pendant le tems où l'ordre naturel le permet, ou de diminuer jusqu'à un certain point la trop grande multiplication d'autres especes qui nous incommodent ou nous causent du dommage. Ce dernier travail rencontre le plus souvent de très grandes difficultés, ou même dans la plûpart des cas il est tout à fait impossible.

Parmi les insectes les plus utiles qui ont mérité l'attention des hommes, & qui les ont le mieux récompensés des soins qu'ils leur ont consacrés, on doit sans contredit donner le premier rang aux abeilles. Leur miel & leur cire leur ont attiré la considération la plus universelle, & presque la plus ancienne, parce que depuis que la terre est habitée & cultivée, elles ont fourni ces productions de leur industrie sans qu'il en coutât beaucoup de peine ou de fraix.

Ainsi, quoiqu'il puisse se trouver dans diverses contrées du Monde plusieurs especes différentes d'insectes, dont les habitans de ces contrées ayent retiré depuis très longtems diverses utilités, cependant il n'y a point d'objet plus anciennement connu que l'on puisse découvrir parmi tous ces peuples divers, que les abeilles & le soin de les élever. Il est bien vrai que plusieurs peuples se sont bornés à l'usage du miel sauvage, sans prendre aucun soin des abeilles; mais l'ancienneté de soin parmi d'autres peuples n'en demeure pas moins constatée. L'art & l'habileté de rassembler dans les forêts les abeilles ouvrieres, de les apprivoiser, de les nourrir, de les conserver, & de se procurer par leur moyen des avantages très considérables, est très anciennement connu, pratiqué & estimé. C'est ce dont on peut se convaincre en consultant les monumens de la plus haute antiquité.

Quant à l'espece, les abeilles sauvages qui donnent du miel, ne différent en rien des abeilles apprivoisées. Le lieu de leur séjour, la qualité de leur nourriture, & quelques autres circonstances accidentelles, leur donnent des caracteres d'où il ne résulte aucune différence réelle. Dès qu'elles cessent d'être sauvages, elles perdent insensiblement, avec leur liberté, les propriétés qui en dépendent; elles deviennent un peu plus foibles, & elles sont plus exposées à certains accidens qu'elles ne l'étoient auparavant. On les traite quelquefois d'une maniere arbitraire, & qui l'est peut-être trop. On les attire & on les fait entrer dans des habitations où le plus souvent elles ne seroient jamais entrées d'elles-mêmes. On divise leurs essains, ou on les conjoint en diverses manieres. Si on le croit convenable

nable à ses vues, on leur soustrait une partie de leur miel ou de leur cire, quelquefois même le tout, & par dessus cela on les tue. Ces détails sont trop connus pour nous y arrêter.

Mais, si d'un côté les dépenses qu'on a à faire pour exécuter tout ce qu'on se propose dans la suite à leur égard, & qui a pour objet en partie leur conservation, en partie l'utilité qu'on souhaite d'en retirer; si ces dépenses, dis-je, sont de véritables bagatelles; l'attention d'un autre côté & les soins doivent être au contraire d'autant plus grands que leurs besoins l'exigent dans quelques saisons. Outre cela il survient des accidens, dont on ne sauroit toujours se préserver entierement, & dont les causes sont suffisamment connues de ceux qui s'entendent à élever des abeilles. Suivant ces principes, le principal but auquel tendent ceux qui se proposent de tirer du profit de leurs abeilles, c'est d'augmenter constamment & considérablement le nombre des ruches & celui des essains qui forment le peuple de chaque ruche. Pour cet effet, ils conservent & renouvellent les ruches aussi longtems qu'ils le jugent avantageux, ils fortifient celles qui sont trop foibles dans les saisons les plus convenables en y incorporant de jeunes essains, & ils tâchent de distribuer & d'employer ces essains de façon qu'ils puissent les conserver, au lieu d'en tuer annuellement un aussi grand nombre qu'on a coûtume de le faire. Et parce que la diminution annuelle, tant naturelle qu'extraordinaire des abeilles ouvrieres, depuis leur sortie de la ruche jusqu'à l'hyver, tant par rapport aux vieilles ruches que dans les nouvelles, n'est que trop certaine, les attentions & les précautions deviennent de plus en plus nécessaires. Quand il arrive outre cela dans certaines années que le déchet accoûtumé devient contre l'attente beaucoup plus fort à cause de la température de l'air, de la qualité des alimens, & des dégâts causés par les frêlons ennemis des abeilles, le nombre des jeunes essains ne sera toujours que trop petit.

Les Romains, qui ont été également versés dans les différentes parties de l'oeconomie des Carthaginois, des Grecs & d'autres peu-

ples fort exercés dans ce genre de travail; & qui transportoient avec succès à leurs contrées les arrangemens les plus utiles qui avoient été pratiqués alleurs, faisoient du soin des abeilles une affaire toute particuliere, qu'ils conduisoient avec le plus grand ordre, la plus grande dextérité, & le plus grand profit. Ils étoient surtout au fait de la diminution tant accoutumée qu'extraordinaire qui peut avoir lieu dans les ruches, & ils avoient un moyen aussi abrégé que commode d'y remédier. Suffisamment instruits par l'expérience commune de la courte vie & du peu de durée des abeilles, & de la nécessité d'en avoir toujours de jeunes en abondance à sa disposition, ils tournoient leur principale & constante attention de ce côté-là; & dans certaines contrées ils trouvoient des occasions plus favorables à cet égard que dans d'autres. Ils remarquoient fort bien, que la multiplication de leurs ruches dans certaines années ne réussissoit pas hors du vrai tems qui y est destinée, que tantôt elle étoit fort chétive & tantôt absolument nulle, malgré toutes les peines qu'ils pouvoient prendre pour la procurer. Quelques ruches ne produisoient que de très petits essains; d'autres s'affoiblissoient par ceux qui sortoient trop tôt ou trop tard, dans des saisons qui n'étoient pas convenables; & les mêmes cas ont lieu chez nous. Il arrivoit outre cela que ces ruches souffroient encore beaucoup, lorsque les jeunes ouvrieres, dans le tems où elles faisoient la récolte de la cire & du miel, venoient à être subitement surprises par un tems froid & humide, quelquefois par des pluyes à verse, des vents impétueux de trop longue durée, ou qu'elles étoient exposées aux attaques de divers ennemis ravisseurs & meurtriers. De cette maniere diverses ruches souffroient quelquefois en peu de tems une telle mortalité que le peu qui en restoit suffisoit à peine pour former un seul essain capable de continuer le travail nécessaire, & de se soutenir pendant le cours de l'hyver.

Quelles que pussent être les sources de ces divers maux, ils prenoient en conséquence des arrangemens déstinés à les prévenir & à y remédier; mais leur principale occupation étoit en général d'augmenter chaque ruche mere qui se trouvoit affoiblie, dans la saison de l'an-

l'année convenable, où du moins aussitôt qu'il étoit possible, d'un jeune essain ou davantage, pour la continuation des travaux nécessaires. De cette maniere, quand la saison les favorisoit, ils mettoient leurs ruches, dans l'espace d'une quinzaine de jours, au point que le travail n'y souffroit plus aucune interruption, & qu'il ne sembloit pas qu'elles eussent jamais été dépourvues d'ouvrieres. De pareils arrangement étoient aussi faciles & commodes qu'avantageux pour ceux qui, connoissant bien le naturel des abeilles, avoient appris à les gouverner sans qu'il soit besoin d'en tuer: quoiqu'il s'en trouvât parmi eux qui étoient instruits de la maniere dont il faut s'y prendre pour les tuer.

Aussitôt donc que le dépérissement d'une ou de plusieurs ruches le demandoit, on songeoit aux moyens d'y porter remede, & d'en construire d'autres; & l'on prenoit pour cet effet le tems où les arbres sont en pleine fleur, ou celui dans lequel les prairies & les forêts sont encore suffisamment émaillées. Il s'agit après cela de saisir la différence des causes principales qui influent sur le mal, & de régler là-dessus les secours qu'on administre. Tantôt c'étoit une espece de maladie contagieuse qui avoit introduit la mortalité dans la ruche; tantôt son affoiblissement venoit de circonstances moins considérables; & ce n'étoit qu'après ces différences qu'on déterminoit l'ordre & l'application des remédes. Ainsi, quand c'étoit une contagion qui étoit le principe de la destruction des abeilles, on s'opposoit à sa violence & à la rapidité de ses progrès, en nettoyant les ruches, en donnant un petit nombre de remedes, & en changeant totalement la nourriture; & avant toutes choses on tâchoit de mettre en sureté le reste de l'essain. Par de telles mesures on réparoit le dommage. Mais, lorsque les circonstances n'exigoient pas les soins & les moyens qui viennent d'être indiqués, on n'a eu rien de mieux à faire pour remédier à la diminution des abeilles que de réunir à la ruche un ou plusieurs jeunes essains; outre cela on se servoit d'un autre moyen beaucoup plus court & plus commode encore, dont nous allons tout à l'heure parler plus au long.

Ces deux sortes de multiplication des abeilles qu'on peut regarder comme parfaitement conformes à la Nature, & d'une utilité décidée, doivent avoir été connues & usitées déjà de très bonne heure chez les Romains, comme les Ecrits qu'ils nous ont transmis sur l'oeconomie de la campagne en font foi. Quand nous comparons les arrangemens rélatifs aux mêmes objets qui ont eu lieu dans le siecle précédent & dans le nôtre, avec les moyens susdits de multiplication pratiqués par les anciens, on y trouve une ressemblance qui, bien qu'elle ne soit pas complette, ne laisse pas de s'étendre fort loin, quelquefois même de n'offrir aucune différence sensible. La longueur du tems, & les révolutions qui font succeder un peuple à un autre, peuvent donner lieu à bien des changemens dans toutes les parties de ce travail. En général, combien d'inventions anciennes & utiles, qui, après avoir été longtems ensévelies dans l'oubli, se sont en partie retrouvées chez d'autres peuples qui y sont parvenus par la réflexion, jusqu'à ce qu'à la fin on les a vu reparoitre dans un troisieme ou quatrieme lieu sous une forme un peu étrangere.

Je ne crois pas devoir rien ajouter davantage ici, sur la multiplication & la conservation des ruches affoiblies, procurée par l'addition d'un ou de deux jeunes essains, puisque tous ceux tant anciens & modernes qui ont été & sont au fait du gouvernement des abeilles, connoissent les circonstances, les avantages & les difficultés de cette opération. Tout ce qu'il convient de remarquer, c'est que diverses bonnes inventions, qui dans leur application se montroient préférables aux autres par bien des commodités, & qui promettoient même des avantages assurés, s'étant ensuite trouvées exposées à quelques inconvéniens particuliers qui s'y montroient attachés, cela a préjudicié, au moins en partie à leur usage principal, en sorte que ces inventions n'ont pas toujours été mises en pratique, ou qu'en les pratiquant on n'a pas pu en retirer partout des avantages égaux. C'est ce que l'exact & judicieux Columella confirme dans ses Ecrits; il avoit déjà très bien remarqué de son tems, que cette maniere d'ailleurs bonne & très praticable de multiplier les abeilles, dont il a été fait mention précédemment, ne laissoit pas d'avoir ses difficultés & ses inconvéniens.

Là

Là deſſus il indique une ſeconde voye de multiplication, dont il donne une deſcription aſſez exacte & reguliere, & qui remédie au déchet des ruches d'une maniere encore bien plus commode, plus promte & qui s'exécute de meilleure heure, de ſorte qu'on n'a pas beſoin d'attendre la perfection & la ſéparation des jeunes eſſains qui ſe détachent de la ruche-mere. Mon deſſein n'eſt pas de balancer ici les avantages de ces deux eſpeces de multiplication, mais ſeulement d'expoſer ce que Columella dit de la derniere, qu'on a regardée en Luſace comme une invention toute nouvelle & particuliere. Il faut plutôt avouer que c'eſt l'ancienne invention, reproduite ſous une forme toute changée, & dont on a fait une très heureuſe application.

Columella *) renferme dans le paſſage ſuivant une deſcription très bienfaite de l'opération dont il s'agit. Voici ſes propres termes.

> *Poteſt autem* minore moleſtia, *in iis domiciliis quæ aliqua peſte vexantur, apium paucitas emendari. Nam, ubi cognita eſt clades infrequentis alvei, quos habeat favos oportet conſiderare. Tum deinde* ceræ quæ ſemina pullonum continent, partem recidere in qua regii generis proles animatur.

Il décrit encore les vrais caracteres de l'endroit du rayon & de la cire, (*favus*,) qui contient les jeunes abeilles, ou plutôt les oeufs couvés des abeilles, requis pour procurer cette eſpece de multiplication.

> *Eſt autem* facilis conſpectu, quoniam fere in ipſo fine cerarum velut papilla uberis apparet eminentior, & laxioris fiſtulæ quam ſunt reliqua foramina, quibus popularis notæ pulli detinentur.

Ce qui ſuit fait bien voir que l'une & l'autre maniere de multiplier les abeilles n'ont pas été inconnues aux Oeconomes Romains, & qu'elles remontent même à des tems encore beaucoup plus reculés.

> *Higinius quidem, (in eo libro quem de apibus ſcripſit,) Ariſtomachus, inquit, hoc modo ſuccurrendum laborantibus exiſtimat. Primum, ut omnes favi vitioſi tollantur, deinde ut fumigentur.*

Il

*) Cap. XI. §. 9. *quomodo apum paucitas emendatur.*

Il continue ainsi.

Prodesse etiam putat apibus vetustate corruptis, examen novum contribuere, *quamvis periculum sit, ne seditione consumentur, verum tamen adjecta multitudine lætaturas. Sed ut concordes maneant, earum apum*, quæ ex alio domicilio transferuntur, quasi peregrinæ plebis reges submoveri debere.

Nec tamen dubium est, quin frequentissimorum examinum favi, qui jam maturos habent pullos, transferri, & subjici paucioribus debeant, *ut tanquam* novæ prolis adoptatione *domicilia confirmentur.*

Pour exécuter mon plan, je dois comparer ce rapport de Columella avec ceux que l'Allemagne fournit depuis quelques années au sujet de la même maniere de multiplier les abeilles. D'après des mémoires dignes de foi, il y a déjà environ vint ans qu'on a découvert des traces de cette manoeuvre dans le Margraviat de Lusace; & dans le cours de l'année derniere tout ce qui concerne cet objet, & son application particuliere, a été déduit par M. *Schirach* dans quelques feuilles très instructives qu'il a publiées pour la satisfaction & l'utilité de ceux qui s'occupent des abeilles *). Les expériences rapportées dans ce nouvel Ecrit, & toutes les autres circonstances qu'on y indique, sont assurement très bien constatées; seulement on ne doit pas regarder le fond même de la chose comme une invention de ces derniers tems, mais comme le renouvellement d'une ancienne invention un peu changée, comme l'application d'un art de multiplier les abeilles, au fait duquel les Romains ont déjà été.

Chez les anciens Romains on étoit soigneux de tirer des ruches les plus fortes les plaques ou tables qui contenoient trois sortes de pontes, & de les introduire dans les ruches affoiblies, afin que par le dévelopement de ces oeufs elles reçussent l'accroissement convenable. Mais il

*) Voici le titre de cet Ouvrage Allemand: *La multiplication des abeilles, conforme aux regles de la nature & de l'art, nouvellement découverte dans la Haute-Lusace, ou la maniere d'introduire dans leur domicile les jeunes essains au commencement du mois de Mai.*

il falloit néceſſairement prendre ces meſures de meilleure heure, & dans une autre ſaiſon de l'année que celle où l'on effectue l'autre maniere de multiplier les abeilles par l'addition des jeunes eſſains. M. *Schirach*, qui poſſede de très bonnes connoiſſances pratiques, a ſu appliquer les plaques ſusdites à des vues un peu différentes; & il a donné là deſſus des détails très intelligibles & très intéreſſans. Le changement qu'il introduit dans les circonſtances conſiſte en ce qu'au lieu de fortifier les ruches foibles par une addition conſidérable de ces tables de cire, il en met de choiſies avec une bonne quantité d'abeilles ouvrieres dans des ruches neuves, au printems vers le tems de la fleur des arbres, avec toutes les proviſions convenables; ou bien il fait faire des caiſſes tout exprès qu'il tient pendant quelque tems dans ſon poële; au moyen de quoi toutes les eſpeces d'abeilles renfermées dans ces tables ſe dévelopent ſucceſſivement, & parviennent à la perfection de leur état.

Le même M. *Schirach* rapporte encore qu'il y a en Luſace quelques perſonnes parmi celles qui élevent des abeilles, dont la méthode eſt de placer d'abord les plaques avec les abeilles qui y ſont attachées, dans les ruches où elles doivent demeurer: & il ne déſapprouve pas entierement ce procédé. Il donne pourtant la préférence à un autre qui en differe un peu, & qu'il s'attribue comme lui étant propre; il la fonde ſur la crainte de cauſer du dommage aux nouvelles ruches en y introduiſant des oeufs pourris, & de quelques autres inconvéniens qui peuvent ſurvenir dans la recherche d'un nouveau Roi, & dans certaines circonſtances particulieres. On ne ſauroit nier que ce qui concerne la recherche d'un nouveau Roi ne ſoit important; mais d'ailleurs toutes les expériences concourent à donner quelque préférence à la premiere des deux manieres, qui conduit au but tout en une fois avec bien moins de travail, & ſans qu'on ait lieu de craindre d'être arrêté par des difficultés conſidérables. En effet, en faiſant bien attention aux paroles ſuivantes de Columella, l'inquietude à l'égard des oeufs pourris ceſſera bientôt.

Sed id cum fiet, animadvertendum ut eos favos ſubjiciamus, quorum pulli ſedes ſuas adaperiunt, & velut opercula foraminum ob-

obductas ceras erodunt, exerentes capita *). *Nam si favos* immaturo foetu transtulerimus, emorientur pulli, cum foveri desierint.

On ne sauroit contester l'utilité des petites caisses d'un bois mince dont M. *Schirach* se sert pour la premiere formation des nouvelles ruches dans son poële, jusqu'à ce que les nouveaux essains soyent éclos. On en tire des avantages considérables, & qui sont confirmés par toutes les expériences physiques. Seulement leur usage oeconomique dans toute l'étendue des opérations qui concernent les abeilles, demande quelques arrangemens particuliers, & donne lieu à des questions, pour la solution desquelles il faut recourir à ceux qui font une étude particuliere de cet objet. Il s'agit de même d'arriver à une plus grande précision sur la maniere dont les jeunes essains peuvent être tirés de semblables corbeilles, & introduits dans les ruches, afin de ne point faire un double travail sans nécessité & sans fruit. Sans compter que, quand on est au point de faire ainsi passer les jeunes abeilles d'un domicile dans l'autre, il faut s'y prendre avec autant de promtitude & de diligence qu'il est possible. Nous n'en dirons pas les raisons; elles sont connues de tous ceux qui vaquent aux travaux de la campagne, pour peu qu'ils ayent été témoins du maniement des abeilles.

*) J'ai éprouvé les mêmes circonstances avec les bourdons, ou grosses abeilles de terre noires & velues; car les ayant pris & introduits avec leur nid tout entier dans une ruche pour les apprivoiser, les abeilles ouvrieres, sous mes yeux, en firent bientôt éclorre les oeufs dans des ruches de verre.

MÉMOI-

MÉMOIRES
DE
L'ACADÉMIE ROYALE
DES
SCIENCES
ET
BELLES-LETTRES.

CLASSE DE MATHÉMATIQUE.

* * *

RECHERCHES
SUR
LE MOUVEMENT DES RIVIERES.
PAR M. EULER.

§. 1.

C'est peu de chose que ce que les Auteurs ont écrit jusqu'ici sur le mouvement des rivieres; & tout ce qu'ils en ont dit, n'est fondé que sur des hypotheses arbitraires, & souvent même tout à fait fausses. Car, quoiqu'on ait déjà assez bien réussi à appliquer les principes de mécanique au mouvement des eaux; on s'est pourtant borné à ne considerer que les cas, où l'eau coule par des tuyaux d'une figure qui n'est pas irréguliere; & dans cette considération on a même supposé, que toutes les particules de l'eau, qui se trouvent dans la même section faite perpendiculairement au tuyau, se meuvent d'un mouvement égal; de sorte que les vitesses de l'eau en chaque section du canal soient réciproquement proportionelles aux amplitudes. Et c'est cette regle, qui sert de base à toutes les recherches qui ont été faites jusqu'ici sur le mouvement des eaux. Les profondes spéculations de Mrs. Bernoulli & d'Alembert, auxquels on est redevable de tout ce qui a été découvert jusqu'ici dans cette science, sont toutes établies sur cette hypothese: & il faut avouer que, dans tous les cas, où ils ont appliqué leur théorie, cette hypothese se trouve fort bien d'accord avec la vérité.

§. 2. Mais, lorsque le mouvement de l'eau est tel, que ses vitesses ne se reglent pas uniquement sur l'amplitude du canal, par le-

quel l'eau coule, de ſorte que les viteſſes dans la même ſection du canal ſont différentes entr'elles; alors il eſt impoſſible d'y appliquer les principes hydrodynamiques, dont on s'eſt ſervi avec un ſi bon ſuccès dans les recherches mentionnées. Cela arrive pour la plûpart, lorsque les canaux, par lesquels l'eau paſſe ſont fort larges; car alors on s'écarteroit trop conſidérablement de la vérité, ſi l'on ſuppoſoit que l'eau paſſât d'un mouvement égal par chaque ſection du canal. Or on comprend aiſément, qu'il faut rapporter ici le mouvement des rivieres; car, dans la même ſection qu'on conçoit faite perpendiculairement au lit de la riviere, l'eau peut avoir des viteſſes fort différentes; & il eſt évident, que les particules d'eau qui ſe trouvent vers le fond du lit, ſont pouſſées par des forces tout à fait différentes, que les particules ſupérieures: d'où il doit néceſſairement réſulter un mouvement très différent dans les particules qui ſe trouvent dans la même ſection du lit.

§. 3. Donc, pour chercher le mouvement de l'eau dans une riviere, il faut abandonner les hypotheſes auxquelles on a attaché jusqu'ici toutes les recherches hydrauliques, pour remonter aux premiers principes de Mécanique, par lesquels tous les mouvemens des corps tant ſolides que fluides ſont déterminés. Il faut conſidérer ſéparément chaque particule d'eau, & chercher toutes les forces auxquelles elle eſt aſſujettie, pour en déterminer les changemens cauſés dans ſon mouvement. Cette recherche étant extrémement difficile & envelopée en des calculs très embarraſſés, je me bornerai à commencer l'explication de cette théorie par un cas, qui ſervira de fondement à tous les autres, & qui ne laiſſera pas de nous fournir des éclairciſſemens fort importans dans cette matiere. Après le dévelopement de ce cas, il ne ſera pas même fort difficile de rendre la recherche plus générale, & de l'appliquer à tous les cas qui ſe peuvent rencontrer.

§. 4. Je conſidérerai donc une ſection verticale faite le long d'une riviere qui nous repréſentera une riviere infiniment étroite; & quand j'aurai déterminé le mouvement de l'eau dans cette ſection, quoique je n'aye pas eu égard à l'action de l'eau, qui ſe trouve à côté de

de part & d'autre, on conviendra, que ce mouvement ne différera pas beaucoup du vrai, quelque large que soit la riviere, pourvu que la figure de son lit ne soit pas extrémement irréguliere. Car je suppose pour le commencement que les pressions de l'eau à côté sont égales de part & d'autre, de sorte que toutes les particules d'eau qui se trouvent dans cette section, se meuvent toujours selon des directions situées dans cette même section. Néanmoins la méthode dont je me servirai, se pourra aussi aisément appliquer aux cas, où l'eau passe d'une telle section verticale dans une autre; & quand on aura trouvé moyen d'expédier le calcul pour le cas que je m'en vai traiter, on parviendra d'autant plus facilement à bout du calcul qui renferme la solution générale.

§. 5. Soit donc AC le lit d'une telle section de riviere, ou d'une riviere infiniment étroite, qui ait partout la même largeur infiniment petite. Que ce lit AC soit une ligne courbe quelconque, qui est supposée être connue; pour cet effet je conçois une ligne horizontale EF qui serve d'axe pour y rapporter la ligne AC par des coordonnées orthogonales EP & PQ. Que ABCD soit la riviere, qui se meut sur ce lit AC, & BD sa superficie supreme; de plus je suppose, que la riviere se trouve déjà dans un état permanent ou d'équilibre, de sorte que sa superficie BD demeure continuellement la même, & qu'aux mêmes points, comme M, les particules d'eau qui y passent ayent toujours les mêmes vitesses, & qu'elles soient assujetties aux mêmes pressions. Fig. 1.

§. 6. Toute l'eau qui forme la riviere doit avoir passée par la section AB, que je considere ici comme la principale, & par rapport à laquelle je déterminerai tant le lieu que le mouvement de chaque particule d'eau après un tems quelconque, depuis qu'elle est passée par la section AB. Soit la hauteur de cette section AB $= a$, dans laquelle je considere un point quelconque O, nommant AO $= z$, & que OMG soit le chemin que chaque particule d'eau, qui passe par le point O, décrit étant emportée par son mouvement. Ici il faut d'abord regarder le mouvement dont chaque particule d'eau passe

passé par le point O. Ce mouvement étant décomposé selon la direction horizontale & verticale, soit m la vitesse selon la direction horizontale, & n la vitesse selon la direction verticale, que je suppose dirigée de haut en bas. Donc, nommant EA $= b$, de sorte que EO $= b + z$, après un tems infiniment petit $= d\tau$, le point d'eau O avancera selon la direction horizontale par l'espace $= m d\tau$, & selon la direction verticale par l'espace $= n d\tau$. Par conséquent après le tems $d\tau$, le point O parviendra en o, en sorte qu'ayant tiré la verticale oe, il soit E$e = m d\tau$, & $eo = b + z - n d\tau$. Or on voit bien que m & n sont de certaines fonctions de z.

§. 7. Qu'après un tems quelconque $= t$, le point d'eau qui est passé par O soit parvenu en M, ayant décrit pendant ce tems t la ligne OM. Qu'on tire de M sur EF la perpendiculaire MP, & nommant EP $= x$; PM $= y$; on voit que x & y seront des fonctions de deux variables t & z. Soit donc pour exprimer la dépendance de ces deux variables,

$$dx = P dt + Q dz, \qquad \& \qquad dy = R dt + S dz,$$

où l'on voit que ces formules différentielles doivent être completes, ou que $\frac{dP}{dz} = \frac{dQ}{dt}$, & $\frac{dR}{dz} = \frac{dS}{dt}$, où $\frac{dP}{dz}$, marque le différentiel de P, en ne supposant que z variable, divisé par dz, & $\frac{dQ}{dt}$, le différentiel de Q, en ne supposant que t variable, divisé par dt, & ainsi des autres. On voit aussi que ces valeurs de x & y, en posant $z = 0$, doivent exprimer la figure du lit AC: puisque l'eau qui passe par le point A, doit glisser sur le lit même. Or, si nous posons $z = a$, ces mêmes formules de x & y exprimeront la figure de la superficie d'eau BD, ou la surface de la riviere.

§. 8. Il est encore à remarquer, que, lorsqu'on met $t = 0$, le point M doit retomber en O. Donc, les fonctions de t & z qui expriment les valeurs de x & y doivent être telles, que si l'on

met

mer $t = 0$, il devienne $x = 0$, & $y = b + z = EO$. De plus, puisque $dx = Pdt + Qdz$, & $dy = Rdt + Sdz$: si nous mettons $t = 0$, & que nous prenions z pour constante, ou $dz = 0$, faisant $dt = d\tau$, ces différentiels donneront le lieu du point o, auquel parvient le point O dans le tems $d\tau$; il sera donc, posant $t = 0$, dans les quantités P & R, $Ee = Pd\tau$, & $eo = b + z + Rd\tau$. Comparant ces valeurs avec celles, que nous avons trouvées en haut, nous aurons $P = m$, & $R = -n$, de sorte que les fonctions P & R, posant $t = 0$, doivent donner les vitesses horizontale & verticale du point O.

§. 9. Pour trouver la ligne OMG, que toutes les particules d'eau, qui passent par le point O, représentent dans la riviere, puisqu'il faut regarder ce point O comme fixe dans la section AB, nous aurons $dz = 0$; donc la nature de la ligne OMG sera contenue dans ces formules:

$$dx = Pdt, \qquad \& \qquad dy = Rdt,$$

qui donnent à connoitre que, dans l'élément de tems dt, le point M parvient en m, en sorte que $Pp = Pdt$, & $pm = y + Rdt$. De là on connoit le mouvement du point M dont il est transporté en m pendant le tems dt. Car, si nous nommons la vitesse horizontale du point $M = v$, & sa vitesse verticale $= u$ dirigée en bas, après le tems dt il doit être $Pp = vdt$, & $pm = y - udt$, & partant nous aurons $v = P$, & $u = -R$. Ainsi connoissant les fonctions P, Q, R, S, dans les formules générales:

$$dx = Pdt + Qdz, \quad \& \quad dy = Rdt + Sdz,$$

les fonctions P & R expriment en même tems les vitesses du point M, la horizontale v, & la verticale u.

§. 10. Donnons maintenant au point O une étendue infiniment petite $OO' = dz$, pour considérer tout le filet d'eau $OO'MM'GG'$, qui passe par cette ouverture $OO' = dz$: car il faut que ce filet demeure toujours continu, sans qu'il s'y introduise aucun vuide.

 Donc

Donc la vitesse horizontale du point O' sera $= m + dm$, & la verticale $= n + dn$, ces quantités m & n étant des fonctions de z. Dans le tems $d\tau$ donc le point O' parviendra en o', en sorte que $Ee' = (m + dm)d\tau$, & $e'o' = b + z + dz - (n + dn)d\tau$. Par conséquent, dans ce même tems $d\tau$, il passe par l'ouverture $OO' = dz$, la masse d'eau $OO'oo'$, dont le volume se trouvera en cette maniere

L'aire du trapeze $EO'o'e$ étant $= \frac{1}{2}Ee'(EO' + e'o')$,
- - du trapeze $EOoe$ - - $= \frac{1}{2}Ee(EO + eo)$,
- - du trapeze $eoo'e'$ - - $= \frac{1}{2}ee'(eo + e'o')$,

d'où l'on tire l'aire

$$OO'o'o = \tfrac{1}{2}Ee'(EO' + e'o') - \tfrac{1}{2}Ee(EO + eo) - \tfrac{1}{2}ee'(eo + e'o')$$
$$= \tfrac{1}{2}Ee(OO' + e'o' - eo) + \tfrac{1}{2}ee'(EO' - eo),$$

& partant elle sera $= mdzd\tau + \frac{1}{2}dmdzd\tau - \frac{1}{2}mdnd\tau^2 + \frac{1}{2}ndmd\tau^2$.

§. 11. Après un tems t, le point O venant en M, de sorte que $EP = x$, $PM = y$, le point O' parviendra en M', de sorte que $EP' = x + Qdz$, & $P'M' = y + Sdz$, & encore après un tems infiniment petit $d\tau$, ces points M & M' seront transportés en m & m', de sorte qu'il sera $Ep = x + Pd\tau$, $pm = y + Rd\tau$, & $Ep' = x + Pd\tau + Qdz$, $p'm' = y + Rd\tau + Sdz$. Donc la masse $OO'o'o = mdzd\tau$, sera parvenue après le tems $= t$, en $MM'm'm$, ou elle remplira cet espace: c'est pourquoi il faut que l'aire $MM'm'm$ soit égale à $OO'o'o = mdzd\tau$. Or, pour trouver cette aire, on n'a qu'à chercher ces 4 trapezes.

$PMmp = \frac{1}{2}Pp(PM + pm) = \frac{1}{2}Pd\tau(2y + Rd\tau)$,
$P'M'm'p' = \frac{1}{2}P'p'(P'M' + p'm') = \frac{1}{2}Pd\tau(2y + Rd\tau + 2Sdz)$,
$PMM'P' = \frac{1}{2}PP'(PM + P'M') = \frac{1}{2}Qdz(2y + Sdz)$,
$pmm'p' = \frac{1}{2}pp'(pm + p'm') = \frac{1}{2}Qdz(2y + 2Rd\tau + Sdz)$,

&

& puisque $MM'm'm = P'M'm'p' + PMM'P' - pm'm'p' - PMmp$, nous aurons $MM'm'm = PSdzd\tau - QRdzd\tau$. Donc il faut qu'il ſoit $PS - QR = m$; & c'eſt la premiere condition à laquelle il faut ſatisfaire.

§. 12. Cette condition que nous venons de trouver, renferme la continuité du fluide, en vertu de laquelle il faut donc que $PS - QR$, ſoit égale à m, c'eſt à dire à une fonction de z, où le tems t n'entre point. Or le premier état en AB, nous découvre encore d'autres propriétés, que les fonctions P, Q, R, S, doivent avoir. Car, faiſant varier au point O tant z, que le tems t, pour parvenir au point o', nous aurons $Ee' = md\tau$, & $e'o' = b + z - nd\tau$, où $d\tau$ marque l'élément du tems t, qui lui-même eſt dans ce cas $= 0$. Donc, ſi $t = 0$, il faut qu'il ſoit $dx = md\tau + odz$, & $dy = -nd\tau + dz$. Or, ayant ſuppoſé en général $dx = Pd\tau + Qdz$, & $dy = Rd\tau + Sdz$, il eſt requis que poſant $t = 0$, il devienne:

$$P = m; \quad Q = 0; \quad R = -n; \quad \& \; S = 1.$$

Ces conditions jointes à celle que $PS - QR = m$, & que les formules différentielles $Pd\tau + Qdz$, & $Rd\tau + Sdz$, doivent être complettes, ou intégrables, déterminent déjà en partie la nature de ces fonctions; & outre cela il faut que, poſant $z = 0$, les coordonnées x & y expriment la nature de la ligne du lit AC.

§. 13. Maintenant, pour trouver l'acceleration de l'élément d'eau $MM'm'm$, dont la maſſe eſt $= m\,dz\,d\tau$, il faut avoir égard aux forces qui y agiſſent. Ces forces, ſont premierement le poids de cet élément, que j'exprimerai par ſon volume $m\,dz\,d\tau$, & par cette force cet élément eſt pouſſé en bas. Enſuite, ce même élément eſt aſſujetti aux preſſions des particules d'eau dont il eſt environné; & ces preſſions s'expriment le plus commodément par la hauteur d'une colonne d'eau, qui exerceroit la même preſſion. Soit donc p la hauteur qui exprime la preſſion au point M, & p ſera une certaine fonction des coordonnées x & y, ou bien des variables t & z; &

pour

pour représenter cette dépendance, soit $dp = Mdt + Ndz$. De là on connoitra les pressions aux points M', m, & m'; car on aura la pression en $M' = p + Ndz$; en $m = p + Mdt$, & en $m' = p + Ndz + Md\tau$, posant $d\tau$ pour dt; comme nous avons fait auparavant en considérant ces points.

§. 14. Donc, sur la face MM' agira une force $= MM'(p + \frac{1}{2}Ndz)$ sur la face Mm une force $= Mm(p + \frac{1}{2}Md\tau)$, sur la face $M'm'$ une force $= M'm'(p + Ndz + \frac{1}{2}Md\tau)$, & sur la face mm' une force $= mm'(p + Md\tau + \frac{1}{2}Ndz)$. Décomposons ces forces selon les direction de coordonnées EP, EA, car puisque ces forces agissent perpendiculairement sur les faces, la résolution donnera:

La force sur	donne les forces selon EP	selon EA
$MM' = MM'(p + \frac{1}{2}Ndz)$;	$+ Sdz(p + \frac{1}{2}Ndz)$;	$- Qdz(p + \frac{1}{2}Ndz)$,
$Mm = Mm(p + \frac{1}{2}Md\tau)$;	$- Rd\tau(p + \frac{1}{2}Md\tau)$;	$+ Pd\tau(p + \frac{1}{2}Md\tau)$,
$mm' = mm'(p + Md\tau + \frac{1}{2}Ndz)$;	$- Sdz(p + Md\tau + \frac{1}{2}Ndz)$;	$+ Qdz(p + Md\tau + \frac{1}{2}Ndz)$,
$M'm' = M'm'(p + Ndz + \frac{1}{2}Md\tau)$;	$+ Rd\tau(p + Ndz + \frac{1}{2}Md\tau)$;	$- Pd\tau(p + Ndz + \frac{1}{2}Md\tau)$.

Donc, prenant toutes ces forces ensemble, l'élément $MM'm'm$, en sera poussé selon la direction horizontale EP par la force $= - MSdzd\tau + NRdzd\tau$; & selon la direction verticale EA, ou en haut par la force $= MQdzd\tau - NPdzd\tau$; de celle-ci il faut donc retrancher la force de la gravité de cet élément, qui est $= PSdzd\tau - QRdzd\tau = mdzd\tau$.

§. 15. La masse $MM'm'm = mdzd\tau$, étant sollicitée par deux forces, l'une selon l'horizontale EP, qui est $= (NR - MS)dzd\tau$, & l'autre selon la verticale EA en haut, qui est $= (MQ - NP)dzd\tau - mdzd\tau$,

la force accélératrice selon la direction EP sera $= \frac{NR - MS}{m}$, &

la force accélératrice selon la direction EA sera $= \frac{MQ - NP}{m} - 1$.

Par

Par conséquent, le point M sera accéleré par ces deux forces accélératrices. Donc, prenant z constant, & l'élément du tems dt également constant, selon les principes de l'accélération, nous aurons:

$$\frac{NR - MS}{m} = \frac{2ddx}{dt^2}, \quad \& \quad \frac{MQ - NP}{m} - 1 = \frac{2ddy}{dt^2}.$$

Or, ayant $dx = Pdt + Qdz$, & $dy = Rdt + Sdz$, si nous posons $dP = \mathfrak{P}dt + \mathfrak{Q}dz$, & $dR = \mathfrak{R}dt + \mathfrak{S}dz$; il sera $ddx = \mathfrak{P}dt^2$, & $ddy = \mathfrak{R}dt^2$, d'où nous tirons enfin ce deux équations

$$NR - MS = 2m\mathfrak{P}, \quad \& \quad MQ - NP - m = 2m\mathfrak{R}.$$

§. 16. Pour déterminer donc le mouvement de la riviere ABCD, qui est formée par l'eau qui decoule continuellement par la section AB $= a$, sur le lit AC, dont la figure est donnée, ayant pris la ligne horizontale EF pour axe, & nommant AE $= b$, soit parvenu une particule d'eau, qui passe par O, posant AO $= z$, après un tems écoulé $= t$ en M, & qu'on nomme les coordonnées EP $= x$, & PM $= y$, ces quantités x & y seront certaines fonctions des variables t & z. Soit donc

$$dx = Pdt + Qdz, \quad \& \quad dy = Rdt + Sdz,$$

où P, Q, & R, S, sont telles fonctions de t & z, que ces formules différentielles soient intégrables. Or, pour les fonctions P & R, soit de plus:

$$dP = \mathfrak{P}dt + \mathfrak{Q}dz, \quad \& \quad dR = \mathfrak{R}dt + \mathfrak{S}dz.$$

Enfin, soit la pression de l'eau au point M exprimée par la hauteur $= p$, qui étant pareillement une fonction des variables t & z, soit

$$dp = Mdt + Ndz.$$

§. 17. Il s'agit donc de trouver les fonctions P, Q, R, S, M, & N; & pour cela il faut satisfaire aux conditions suivantes.

1) Les coordonnées x & y doivent être telles fonctions de t & z, que lorsqu'on met $z = 0$, elles expriment la figure du lit AC; ainsi, posant $z = 0$, on aura pour la figure du lit AC ces formules $dx = P dt$, & $dy = R dt$. Or, lorsqu'on met $t = 0$, il faut qu'il devienne $x = 0$, & $y = b + z$.

2) Le mouvement de l'eau, qui coule par le point O étant supposé tel, que sa vitesse selon la direction horizontale soit $= m$, & sa vitesse selon la direction verticale dirigée en bas $= n$, il faut qu'il soit posant $t = 0$;

$$P = m; \quad Q = 0; \quad R = -n; \quad S = 1,$$

où m & n seront des fonctions de la seule variable z, sans renfermer l'autre t.

3) La troisieme condition exige, qu'il soit en général: $PS - QR = m$, où $PS - QR$ doit être une fonction de la seule variable z, sans qu'il y entre l'autre variable t.

4) La considération de l'accélération nous a fourni ces équations, auxquelles il faut satisfaire:

$$NR - MS = 2m\mathfrak{P}, \ \& \ MQ - NP = 2m\mathfrak{R} + m.$$

5) Enfin il est évident que la pression p doit être une telle fonction de t & z, que lorsqu'on met $z = a$, auquel cas la pression se rapportera à la superficie BD, la valeur de p évanouisse. Donc il faut qu'il devienne $M = 0$, si l'on met $z = a$.

§. 18. Les formules de la quatrieme condition, puisqu'il est en vertu de la troisieme $m = PS - QR$, donneront

$$M = -2P\mathfrak{P} - 2R\mathfrak{R} - R,$$
$$\& \quad N = -2Q\mathfrak{P} - 2S\mathfrak{R} - S,$$

& de là nous obtiendrons:

$$dp = \begin{cases} -2P\mathfrak{P}dt - 2R\mathfrak{R}dt - Rdt \\ -2Q\mathfrak{P}dz - 2S\mathfrak{R}dz - Sdz \end{cases}$$

Mais

Mais, ayant $Pdt + Qdz = dx$, & $Rdt + Sdz = dy$, il sera

$$dp = -2\mathfrak{P}dx - 2\mathfrak{R}dy - dy.$$

Donc, puisque cette formule doit être intégrable, il faut que $\mathfrak{P}dx + \mathfrak{R}dy$, soit une formule différentielle complette.

§. 19. De là on peut encore tirer la condition suivante: Puisque $\mathfrak{P}dt = dP - \mathfrak{Q}dz$, & $\mathfrak{R}dt = dR - \mathfrak{S}dz$, la substitution de ces formules donnera:

$$dp = \begin{matrix} -2PdP + 2P\mathfrak{Q}dz + 2R\mathfrak{S}dz \\ -2RdR - 2Q\mathfrak{P}dz - 2S\mathfrak{R}dz \end{matrix} - dy,$$

dont l'intégrale, entant qu'elle peut se prendre, sera:

$$p = C - y - PP - RR + 2\int dz(P\mathfrak{Q} - Q\mathfrak{P} - R\mathfrak{S} - S\mathfrak{R}).$$

Donc il faut que la formule $P\mathfrak{Q} - Q\mathfrak{P} + R\mathfrak{S} - S\mathfrak{R}$, soit une fonction de la seule variable z, puisque sans cela l'intégration ne pourroit avoir lieu.

§. 20. Soit donc $P\mathfrak{Q} - Q\mathfrak{P} + R\mathfrak{S} - S\mathfrak{R} = w$, de sorte que w marque une fonction de la seule variable z, & la pression en M sera

$$p = C - y - PP - RR + 2\int w dz,$$

& $\int w dz$ sera pareillement une fonction de z. Or, puisque l'expression de p doit évanouïr, si l'on met $z = a$, il faut que cette position $z = a$, fasse évanouïr tous les t dans la formule $y + PP + RR$, de sorte qu'elle devienne une quantité constante. Et alors on n'aura qu'à déterminer C, en sorte que p évanouïsse dans ce cas $z = o$.

§. 21. Puisque nous avons aussi $PS - QR = m$, où m est pareillement une fonction de la seule z, ces deux équations:

$$PS - QR = m,$$

$$P\mathfrak{Q} + Q\mathfrak{P} + R\mathfrak{S} - S\mathfrak{R} = w,$$

pour-

pourront servir à éliminer Q & S: & on trouve

$$Q = \frac{PP\mathfrak{Q} + PR\mathfrak{S} - m\mathfrak{R} - wP}{P\mathfrak{P} + R\mathfrak{R}},$$

$$S = \frac{PR\mathfrak{Q} + RR\mathfrak{S} + m\mathfrak{P} - wR}{P\mathfrak{P} + R\mathfrak{R}},$$

& ces valeurs doivent rendre intégrables les formules

$$dx = P\,dt + Q\,dz, \quad \& \quad dy = R\,dt + S\,dz.$$

Or substituant ces valeurs trouvées en y introduisant les formules $dP = \mathfrak{P}dt + \mathfrak{Q}dz$, & $dR = \mathfrak{R}dt + \mathfrak{S}dz$, nous aurons:

$$dx = \frac{PPdP + PRdR - m\mathfrak{R}dz - wPdz}{P\mathfrak{P} + R\mathfrak{R}},$$

$$dy = \frac{PRdP + RRdR + m\mathfrak{P}dz - wRdz}{P\mathfrak{P} + R\mathfrak{R}},$$

& l'une & l'autre de ces formules doit être intégrable.

§. 22. Toute la question se réduit donc à la recherche de la nature de ces deux fonctions P & R, desquelles dépendent les fonctions $\mathfrak{P}$ & $\mathfrak{R}$, afin que ces deux formules

$$dx = \frac{P(PdP + RdR) - m\mathfrak{R}dz - wPdz}{P\mathfrak{P} + R\mathfrak{R}},$$

$$dy = \frac{R(PdP + RdR) + m\mathfrak{P}dz - wRdz}{P\mathfrak{P} + R\mathfrak{R}},$$

deviennent intégrables. Et lorsqu'on aura trouvé moyen de résoudre ce probleme en général, il ne sera plus difficile de déterminer ces fonctions en sorte qu'elles satisfassent aux autres conditions. Or ce probleme est si difficile, que, quoiqu'il ne dépende que de l'analyse, nous ne pouvons presque espérer de parvenir jamais à la solution générale, qui pourroit servir à déterminer le mouvement de toute sorte de rivieres.

§. 23.

§. 23. Ces difficultés m'obligent à m'arrêter à des cas particuliers, dont l'évolution pourra en même tems servir à nous montrer comme il faut s'y prendre, pour chercher la solution générale. Puisque donc, posant $t = 0$, il faut qu'il devienne $x = 0$, & $y = b + z$, je supposerai

$$x = Vt + Att, \quad \& \ y = b + z + Zt + Btt,$$

où V & Z marquent des fonctions de la seule variable z. Nous aurons donc:

$$P = V + 2At; \qquad R = Z + 2Bt,$$

$$Q = \frac{t\,dV}{dz}; \qquad S = 1 + \frac{t\,dZ}{dz},$$

$$\mathfrak{P} = 2A; \qquad \mathfrak{R} = 2B,$$

$$\mathfrak{Q} = \frac{dV}{dz}; \qquad \mathfrak{S} = \frac{dZ}{dz}.$$

& par la seconde condition il sera $m = V$; & $n = -Z$. Or la troisieme condition donne

$$PS - QR = V + 2At + \frac{VtdZ}{dz} + \frac{2AttdZ}{dz} - \frac{ZtdV}{dz} - \frac{2BttdV}{dz},$$

& cette expression doit être $= m = V$, d'où nous tirons ces deux équations:

$$2A\,dz + V\,dZ - Z\,dV = 0, \quad \& \ A\,dZ = B\,dV,$$

dont la derniere donne $Z = \frac{BV}{A} + C$, qui étant remise dans la premiere produit $2A\,dz - C\,dV = 0$, & partant $V = \frac{2Az}{C} + D$, donc $Z = \frac{2Bz}{C} + \frac{BD}{A} + C$.

§. 24.

§. 24. Changeons ces constantes, & soit $D = \frac{2Ac}{C}$; $A = \frac{1}{2}\alpha C$; $B = \frac{1}{2}\beta C$, pour avoir $V = \alpha(z+c)$; & $Z = C + \beta(z+c)$, & nos formules deviendront:

$$x = \alpha(z+c)t + \tfrac{1}{2}\alpha Ctt; \quad y = b + z + Ct + \beta(z+c)t + \tfrac{1}{2}\beta Ctt;$$
$$P = \alpha(z+c) + \alpha Ct; \quad R = C + \beta(z+c) + \beta Ct,$$
$$Q = \alpha t; \quad S = 1 + \beta t,$$
$$\mathfrak{P} = \alpha C; \quad \mathfrak{R} = \beta C,$$
$$\mathfrak{Q} = \alpha; \quad \mathfrak{S} = \beta,$$

De là nous obtiendrons la fonction de z, qui a été nommée $w = P\mathfrak{Q} - Q\mathfrak{P} + R\mathfrak{S} - S\mathfrak{R}$, ce qui produit

$$w = \alpha\alpha(z+c) + \alpha\alpha Ct + \beta C + \beta\beta(z+c) + \beta\beta Ct,$$
$$\quad - \alpha\alpha Ct - \beta C \qquad - \beta\beta Ct,$$

$$\text{ou} \quad w = (\alpha\alpha + \beta\beta)(z+c).$$

Car, puisque les termes qui contenoient t se sont détruits eux-mêmes, on n'a pas besoin de réduction ultérieure.

§. 25. De là nous aurons donc $2\int w dz = (\alpha\alpha + \beta\beta)(zz + 2cz + cc)$, & la pression au point M deviendra

$$\begin{aligned} p = \text{Const.} - b - z \; & - Ct - \beta(z+c)t - \tfrac{1}{2}\beta Ctt + \alpha\alpha(z+c)^2 \\ & - \alpha\alpha(z+c)^2 - 2\alpha\alpha Ct(z+c) - \alpha\alpha CCtt + \beta\beta(z+c)^2 \\ & - \beta\beta(z+c)^2 - 2\beta CCt \qquad - \beta\beta CCtt \\ & - 2C\beta(z+c) - 2\beta\beta Ct(z+c) \\ & - CC \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} p = \text{Const.} - b - z - 2C\beta(z+c) - CC - (1 + 2\beta C)Ct \\ - (\beta + 2\alpha\alpha C + 2\beta\beta C)(z+c)t - C(\tfrac{1}{2}\beta + \alpha\alpha C + \beta\beta C)tt. \end{aligned}$$

Or cette expression devant évanouir, posant $z = a$, quelque valeur qu'obtienne la variable t, nous en tirerons trois équations

Const.

$$\text{Conſt.} = b + a + 2C\beta(a + c) + CC.$$
$$(1 + 2\beta C)C + (\beta + 2\alpha\alpha C + 2\beta\beta C)(a + c) = 0.$$
$$C(\tfrac{1}{2}\beta + \alpha\alpha C + \beta\beta C) = 0,$$

dont la derniere nous fournit deux ſolutions, que je développerai ſéparément.

§. 26. Soit donc pour la premiere ſolution $C = 0$; & la ſeconde donne $c = -a$; & la premiere Conſt. $= b + a$. Donc nos équations pour le mouvement de l'eau ſeront:

$$x = \alpha(z - a)t, \quad \& \quad y = b + z + \beta(z - a)t;$$

& la preſſion $p = a - z - \beta(z - a)t$.

Puiſque z ne peut pas devenir plus grand que a, on voit bien qu'il faut prendre α négatif, de ſorte qu'il ſoit

$$x = \alpha(a - z)t, \quad \& \quad y = b + z - \beta(a - z)t,$$

& la preſſion $p = a - z + \beta(a - z)t$.

Poſant $z = 0$, la figure du lit AC dans ce cas ſera exprimée par ces formules $x = \alpha a t$, & $y = b - \beta a t$, d'où l'on connoit, que le lit AC ſera une ligne droite inclinée à l'horizon ſous un angle dont la tangente $= \frac{\beta}{\alpha}$.

§. 27. Pour le ſecond cas, nous aurons $C = \frac{-\beta}{2(\alpha\alpha + \beta\beta)}$, d'où la ſeconde équation devient $(1 + 2\beta C)C = 0$, ou bien $\alpha\alpha\beta = 0$, il ſera donc ou α ou $\beta = 0$: s'il étoit $\beta = 0$, il ſeroit $C = 0$, comme dans le cas précédent, ſoit donc $\alpha = 0$; & il ſera $C = -\frac{1}{2\beta}$; & Conſt. $= b + a - a - c + \frac{1}{4\beta\beta} = b - c + \frac{1}{4\beta\beta}$:

D'où nos équations pour le mouvement de l'eau ſeront:

$$x = \alpha(z + c)t, \quad \& \quad y = b + z - \frac{t}{2\beta} + \beta(z + c)t - \tfrac{1}{4}tt,$$

 &

& $p = o$. Or α étant $= o$, puisque $x = o$, l'eau en coulant par AB ne sortira jamais de la perpendiculaire BAE.

§. 28. Dans ce cas donc l'eau couleroit perpendiculairement de haut en bas. Mais, si nous prenons $c = \infty$, afin que αc obtienne une valeur finie $= f$, & que nous posions également $\beta = o$, en sorte que $\frac{1}{2\beta} - \beta c = g$, il en résultera le cas suivant

$$x = ft, \quad \& \quad y = b + z - gt - \tfrac{1}{4}tt,$$

& la pression sera partant $= o$. Donc, le lit n'étant pas pressé, ce cas renferme le mouvement où l'eau tombe librement & selon une direction oblique quelconque. Or il est clair aussi que, par toute la hauteur AB, l'eau doit passer avec la même vitesse & selon la même direction, de sorte que chaque particule d'eau décrive une parabole, tout comme si elle étoit séparée du reste; puisqu'elle n'en souffre aucune pression. Aussi voyons-nous de nos formules, que la figure du lit, ou le chemin des particules qui passent par A, est une parabole comprise dans ces formules

$$x = ft, \quad \& \quad y = b - gt - \tfrac{1}{4}tt.$$

§. 29. Dans le premier cas, ayant posé $C = o$, pour satisfaire à la seconde équation, au lieu de mettre $c = -a$, on peut aussi faire $\beta = o$; & la premiere sera Const. $= b + a$. Dans ce cas nous aurons:

$$x = \alpha(z + c)t, \quad \& \quad y = b + z,$$

& $p = a - z$, où au lieu de $x = \alpha(z + c)t$, nous pouvons mettre $x = (\alpha z + \beta)t$. Ici nous voyons que le lit AC devient une ligne horizontale de même que la superficie BD: car chaque particule d'eau se mouvra uniformément dans une direction horizontale, & $\alpha z + \beta$ marque la vitesse dont l'eau passe par le point O. Aussi les diverses parties d'eau n'agiront l'une sur l'au-

tre

tre qu'en vertu de leur pesanteur, de là vient que la pression $p = a - z$ est partout la même comme si l'eau étoit en repos. Dans ce cas donc, la surface de la riviere sera parfaitement horizontale, & le mouvement de toutes les parties se fera horizontalement & sera uniforme.

§. 30. Ayant trouvé $x = (\alpha z + \beta)t$, la vitesse de l'eau au point O seroit $= \alpha z + \beta$; mais on comprend aisément que ce même cas doit subsister, de quelque maniere que varient les vitesses aux divers points O. Aussi voyons-nous que ces valeurs

$$x = Zt, \quad \& \quad y = b + z,$$

où Z marque une fonction quelconque de z, satisfont également à toutes les conditions requises. Car ayant

$$P = Z; \quad Q = \frac{t\,dZ}{dz}; \quad R = 0; \quad S = 1, \quad \text{\& de là}$$

$$\mathfrak{P} = 0; \quad \mathfrak{Q} = \frac{dZ}{dz}; \quad \mathfrak{R} = 0; \quad \mathfrak{S} = 0, \quad \text{il sera}$$

$$m = PS - QR = Z = \text{à une fonction de } z,$$

$$n = P\mathfrak{Q} - Q\mathfrak{P} + R\mathfrak{S} - S\mathfrak{R} = \frac{Z\,dZ}{dz} = \text{à une fonction de } z,$$

d'où nous tirons la pression à un point quelconque M,

$$p = \text{Const.} - b - z - ZZ + 2\int Z\,dZ = a - z.$$

Ainsi une riviere peut subsister sur un lit horizontal, lorsque toutes les particules d'eau se meuvent uniformément selon des directions horizontales d'eau, & la surface supreme demeurera horizontale. De plus, la pression de l'eau sera partout la même que si toute l'eau étoit en repos.

§. 31. Voici donc trois diverſes valeurs des coordonnées x & y, qui ſatisfont aux conditions requiſes pour repréſenter le mouvement d'une riviere.

I. $x = ft$; $\quad y = b + z - gt - \frac{1}{4}tt$,

II. $x = \alpha(a - z)t$; $\quad y = b + z + \beta(a - z)t$,

III. $x = Zt$; $\quad y = b + z$,

où Z marque une fonction quelconque de z.

Or le ſecond cas peut encore être rendu plus général, en poſant:

$$x = (a - z)Zt, \quad \& \quad y = b + z + \beta(a - z)Zt;$$

& ce ſera de la conſidération de ces cas particuliers qu'on pourra eſpérer la ſolution générale.

RECHER-

RECHERCHES
SUR
LA COURBURE DES SURFACES.

PAR M. EULER.

Pour connoitre la courbure des lignes courbes, la détermination du rayon osculateur en fournit la plus juste mesure, en nous présentant pour chaque point de la courbe un cercle, dont la courbure est précisément la même. Mais, quand on demande la courbure d'une surface, la question est fort équivoque, & point du tout susceptible d'une réponse absolue, comme dans le cas précédent. Il n'y a que les surfaces sphériques dont on puisse mesurer la courbure, attendu que la courbure d'une sphere est la même que celle de ses grands cercles, & que son rayon en peut être regardé comme la juste mesure. Mais pour les autres surfaces on n'en sauroit même comparer la courbure avec celle d'une sphere, comme on peut toujours comparer la courbure d'une ligne courbe avec celle d'un cercle; la raison en est évidente puisque, dans chaque point d'une surface, il peut y avoir une infinité de courbures différentes. On n'a qu'à considérer la surface d'un cylindre, où selon les directions paralleles à l'axe il n'y a aucune courbure, pendant que dans les sections perpendiculaires à l'axe, qui sont des cercles, la courbure est la même, & que toute autre section faite obliquement à l'axe donne une courbure particuliere. Il en est de même de toutes les autres surfaces, où il peut même arriver que dans un sens la courbure soit convexe, & dans un autre concave, comme dans celles qui ressemblent à une selle.

Donc la question sur la courbure des surfaces n'est pas susceptible d'une réponse simple, mais elle exige à la fois une infinité de déter-

mi-

minations: car, puisqu'on peut tracer par chaque point d'une surface une infinité de directions, il faut connoitre la courbure selon chacune, avant qu'on puisse se former une juste idée de la courbure de la surface. Or, par chaque point d'une surface, on peut faire passer une infinité de sections, & cela non seulement par rapport à toutes les directions sur la surface même, mais aussi par rapport à leur inclinaison différente sur la surface. Mais, pour le sujet présent, il suffit de ne considérer de toutes ces infinies sections que celles qui sont perpendiculaires sur la surface, dont le nombre est pourtant encore infini. Pour cet effet, on n'a qu'à tirer à la surface la ligne droite perpendiculaire, & toutes les sections qui passent par cette ligne sont en même tems perpendiculaires à la surface, alors pour chacune de ces sections il faut chercher la courbure, ou le rayon osculateur, & l'assemblage de tous ces rayons nous donnera la juste mesure de la courbure de la surface au point donné, où il faut observer que chacun de ces rayons tombe sur la même direction qui est perpendiculaire à la surface, & que les arcs élémentaires de toutes ces sections appartiennent aux lignes les plus courbes qu'on peut tirer sur la surface.

Or, pour rendre ces recherches plus générales, je commencerai par déterminer le rayon osculateur pour une section quelconque plane, dont on coupe la surface; ensuite j'appliquerai cette solution aux sections qui sont perpendiculaires à la surface, dans un point donné quelconque; & enfin je comparerai entr'eux les rayons osculateurs de toutes ces sections, par rapport à leur inclinaison mutuelle, ce qui nous mettra en état d'établir une idée juste de la courbure des surfaces. Toutes ces recherches se réduisent donc aux problemes suivans.

PROBLEME I.

1. *Une surface dont la nature est connue étant coupée par un plan quelconque, déterminer la courbure de la section, qui en est formée.*

SOLUTION.

Planche III. Fig. 1. Qu'on rapporte la surface à un plan fixe qui soit celui de la planche, & y ayant baissé d'un point quelconque Z de la surface la per-

perpendiculaire ZY, & du point Y à un axe fixe AC la perpendiculaire YX, soient les trois coordonnées $AX = x$, $XY = y$, & $YZ = z$: & puisque la nature de la surface est connue, la quantité z sera égale à une certaine fonction des deux autres x & y. Supposons donc qu'on en tire par la différentiation $dz = pdx + qdy$, de sorte que $p = \left(\frac{dz}{dx}\right)$, & $q = \left(\frac{dz}{dy}\right)$. Que la section dont on coupe la surface passe par le point Z, & que l'intersection de son plan avec notre plan fixe soit la ligne EF. Soit $z = \alpha y - \beta x + \gamma$, équation qui détermine ce plan, & posant $z = 0$, l'équation $y = \frac{\beta x - \gamma}{\alpha}$, donnera l'intersection EF, d'où nous tirons: $AE = \frac{\gamma}{\beta}$: & la tangente de l'angle $CEF = \frac{\beta}{\alpha}$, donc le sinus $= \frac{\beta}{\sqrt{(\alpha\alpha + \beta\beta)}}$, & le cosinus $= \frac{\alpha}{\sqrt{(\alpha\alpha + \beta\beta)}}$. De là, en égalant les deux valeurs de z, nous aurons une équation pour la section $\alpha dy - \beta dx = pdx + qdy$, ou bien $\frac{dy}{dx} = \frac{\beta + p}{\alpha - q}$. Mais, pour réduire cette équation à des coordonnées rectangulaires, tirons de Y à l'intersection EF la perpendiculaire YT, & la droite ZT y sera aussi perpendiculaire. Maintenant, puisque $EX = x - \frac{\gamma}{\beta}$, nous aurons

$$ET = \frac{\alpha x + \beta y}{\sqrt{(\alpha\alpha + \beta\beta)}} - \frac{\alpha\gamma}{\beta\sqrt{(\alpha\alpha + \beta\beta)}}, \quad \&$$

$$TY = \frac{\alpha y - \beta x}{\sqrt{(\alpha\alpha + \beta\beta)}} + \frac{\gamma}{\sqrt{(\alpha\alpha + \beta\beta)}} = \frac{z}{\sqrt{(\alpha\alpha + \beta\beta)}},$$

& partant $TZ = \frac{z\sqrt{(1 + \alpha\alpha + \beta\beta)}}{\sqrt{(\alpha\alpha + \beta\beta)}} = \frac{(\alpha y - \beta x + \gamma)\sqrt{(1 + \alpha\alpha + \beta\beta)}}{\sqrt{(\alpha\alpha + \beta\beta)}}$.

Posant donc

$$ET = \frac{\alpha x + \beta y}{\sqrt{(\alpha\alpha + \beta\beta)}} - \frac{\alpha\gamma}{\beta\sqrt{(\alpha\alpha + \beta\beta)}} = t, \quad \&$$

$$TZ = \frac{(\alpha y - \beta x + \gamma)\sqrt{(\alpha\alpha + \beta\beta + 1)}}{\sqrt{(\alpha\alpha + \beta\beta)}} = u,$$

nous pourrons regarder ces lignes t & u comme des coordonnées orthogonales de la section en question. Donc, si nous posons $du = s\,dt$, le rayon osculateur de la section au point M sera $= -\frac{dt(1 + ss)^{\frac{3}{2}}}{ds}$ entant qu'il est tourné vers la base EF. Il ne s'agit donc à présent qu'à réduire cette expression aux coordonnées x & y. Pour cet effet, puisque

$$dt = \frac{\alpha dx + \beta dy}{\sqrt{(\alpha\alpha + \beta\beta)}}, \quad \& \ du = \frac{\alpha dy - \beta dx}{\sqrt{(\alpha\alpha + \beta\beta)}}\sqrt{(1 + \alpha\alpha + \beta\beta)},$$

à cause de $\frac{dy}{dx} = \frac{\beta + p}{\alpha - q}$ nous en tirons

$$s = \frac{du}{dt} = \frac{\alpha p + \beta q}{\alpha\alpha + \beta\beta - \alpha q + \beta p}\sqrt{(1 + \alpha\alpha + \beta\beta)},$$

donc $1 + ss = \frac{(\alpha\alpha + \beta\beta)(\alpha\alpha + \beta\beta - 2\alpha q + 2\beta p + (\alpha p + \beta q)^2 + pp + qq)}{(\alpha\alpha + \beta\beta - \alpha q + \beta p)^2}$.

Ensuite, pour le différentiel de s, nous aurons

$$ds = \frac{(\alpha\alpha + \beta\beta)(\alpha dp + \beta dq - q dp + p dq)\sqrt{(1 + \alpha\alpha + \beta\beta)}}{(\alpha\alpha + \beta\beta - \alpha q + \beta p)^2}.$$

Remarquons à présent que

$$dp = dx\left(\frac{dp}{dx}\right) + dy\left(\frac{dp}{dy}\right), \quad \& \ dq = dx\left(\frac{dq}{dx}\right) + dy\left(\frac{dq}{dy}\right),$$

d'où

d'où nous concluons:

$$\frac{dp}{dt} = \frac{(\alpha - q)\left(\frac{dp}{dx}\right) + (\beta + p)\left(\frac{dp}{dy}\right)}{\alpha\alpha + \beta\beta - \alpha q + \beta p} \sqrt{(\alpha\alpha + \beta\beta)}, \quad \&$$

$$\frac{dq}{dt} = \frac{(\alpha - q)\left(\frac{dq}{dx}\right) + (\beta + p)\left(\frac{dq}{dy}\right)}{\alpha\alpha + \beta\beta - \alpha q + \beta p} \sqrt{(\alpha\alpha + \beta\beta)},$$

& partant:

$$\frac{ds}{dt} = \frac{(\alpha\alpha+\beta\beta)^{\frac{3}{2}}\left((\alpha-q)^2\left(\frac{dp}{dx}\right)+(\beta+p)^2\left(\frac{dq}{dy}\right)+2(\alpha-q)(\beta+p)\left(\frac{dp}{dy}\right)\right)\sqrt{(1+\alpha\alpha+\beta\beta)}}{(\alpha\alpha+\beta\beta-\alpha q+\beta p)^3},$$

à cause de $\left(\frac{dq}{dx}\right) = \left(\frac{dp}{dy}\right)$, comme il est connu d'ailleurs. Par conséquent, le rayon osculateur de la section au point Z sera exprimé en sorte:

$$-\frac{(\alpha\alpha+\beta\beta-2\alpha q+2\beta p+(\alpha p+\beta q)^2+pp+qq)^{\frac{3}{2}}}{\left((\alpha-q)^2\left(\frac{dp}{dx}\right)+(\beta+p)^2\left(\frac{dq}{dy}\right)+2(\alpha-q)(\beta+p)\left(\frac{dp}{dy}\right)\right)\sqrt{(1+\alpha\alpha+\beta\beta)}}.$$

Voilà donc la véritable expression du rayon osculateur pour une section quelconque, dont on coupe la surface proposée.

Corollaire I.

2. L'inclinaison de cette section au plan fixe est mesurée par l'angle YTZ, dont la tangente est $\frac{YZ}{YT} = \sqrt{(\alpha\alpha + \beta\beta)}$, & partant le sinus $= \frac{\sqrt{(\alpha\alpha + \beta\beta)}}{\sqrt{(1 + \alpha\alpha + \beta\beta)}}$, & le cosinus $= \frac{1}{\sqrt{(1 + \alpha\alpha + \beta\beta)}}$, pendant que de l'angle CEF la tangente

 est

eſt $= \frac{\beta}{\alpha}$; donc le ſinus $= \frac{\beta}{\sqrt{(\alpha\alpha + \beta\beta)}}$, & le coſinus $= \frac{\alpha}{\sqrt{(\alpha\alpha + \beta\beta)}}$.

COROLLAIRE II.

3. Par rapport à la ſection, il n'y a que les deux lettres α & β, qui entrent dans la détermination du rayon oſculateur, la troiſieme lettre γ étant compriſe dans la condition que la ſection paſſe par le point Z. Or ces deux lettres ſe réduiſent aux deux angles CEF, & YTZ.

COROLLAIRE III.

4. Si nous poſons ces angles CEF $= \zeta$, & YTZ $= \theta$, nous aurons $\beta = \alpha \operatorname{tang} \zeta$, & $\sqrt{(\alpha\alpha + \beta\beta)} = \operatorname{tang} \theta$, d'où il s'enſuit $\alpha = \operatorname{cof} \zeta \operatorname{tang} \theta$, & $\beta = \operatorname{fin} \zeta \operatorname{tang} \theta$; & de plus $\sqrt{(1 + \alpha\alpha + \beta\beta)} \frac{1}{\operatorname{cof} \theta}$. Mais cette ſubſtitution ne rend pas plus ſimple l'expreſſion que nous venons de trouver pour le rayon oſculateur.

PROBLEME II.

Fig. 2. 5. *Si le plan de la ſection eſt perpendiculaire à la ſurface au point Z, déterminer le rayon oſculateur de cette ſection au même point Z.*

SOLUTION.

Pour cet effet on n'a qu'à tirer du point Z la ligne ZP, qui ſoit perpendiculaire à la ſurface, & faire en ſorte que le plan de la ſection paſſe par cette ligne ZP. Qu'on conſidere deux autres ſections faites par le point Z, l'une & l'autre perpendiculaire au plan de la planche, l'interſection de l'une étant la ligne YM parallele à l'axe AL, & celle de l'autre YN y ſoit perpendiculaire. Pour la premiere de ces deux ſections, la quantité XY $= y$ doit être priſe conſtante, & l'équation $dz = pdx$ donnera pour la ſousnormale

YM

$YM = \frac{z\,dz}{dy} = pz$. Or, pour l'autre section, prenant x constante, l'équation $dx = q\,dy$ donne la sousnormale $YN = \frac{z\,dz}{dy} = qz$. Tirant maintenant par les points M & N les lignes MP & NP paralleles aux coordonnées XY & AX qui s'entrecoupent au point P, la droite ZP sera perpendiculaire à l'une & l'autre de nos deux sections, & partant elle sera aussi perpendiculaire à la surface au point Z. Il faut donc que les sections dont il est question dans le probleme passent par cette ligne ZP, qui donnera en même tems la position du rayon osculateur, que nous cherchons. Nous n'avons donc qu'à faire passer l'intersection EF par le point P. Soit ζ l'angle PEL, que fait cette intersection avec l'axe AL, de sorte que $\beta = \alpha \tang \zeta$; & puisque la perpendiculaire tirée de N sur EP seroit $= NP \sin \zeta = pz \sin \zeta$, nous en concluons la perpendiculaire $YT = z(p \sin \zeta - q \cos \zeta)$, & partant la tangente de l'angle $YTZ = \frac{1}{p \sin \zeta - q \cos \zeta}$, qui sera la valeur de tang θ, & de là nous tirons $\alpha = \frac{\cos \zeta}{p \sin \zeta - q \cos \zeta}$, & $\beta = \frac{\sin \zeta}{p \sin \zeta - q \cos \zeta}$: donc, puisque $\beta : \alpha = \sin \zeta : \cos \zeta$, l'une & l'autre donne $\beta p - \alpha q = 1$. Or, substituant ces valeurs pour α & β dans l'expression trouvée pour le rayon osculateur, le numérateur deviendra

$$\frac{(1 + pp + qq)^{\frac{3}{2}} (1 + (p \sin \zeta - q \cos \zeta)^2)^{\frac{3}{2}}}{(p \sin \zeta - q \cos \zeta)^3},$$

& pour le dénominateur

$$\sqrt{(1 + \alpha\alpha + \beta\beta)} = \frac{\sqrt{(1 + (p \sin \zeta - q \cos \zeta)^2)}}{p \sin \zeta - q \cos \zeta},$$

& l'autre facteur:

$$\frac{((1+qq)\cos\zeta-pq\sin\zeta)^2\left(\frac{dp}{dx}\right)+((1+pp)\sin\zeta-pq\cos\zeta)^2\left(\frac{dq}{dy}\right)+2((1+qq)\cos\zeta-pq\sin\zeta)((1+pp)\sin\zeta-pq\cos\zeta)\left(\frac{dp}{dy}\right)}{(p\sin\zeta-q\cos\zeta)^2}$$

& partant le rayon osculateur au point Z sera

$$\frac{-(1+(p\sin\zeta-q\cos\zeta)^2)(1+pp+qq)^{\frac{3}{2}}}{((1+qq)\cos\zeta-pq\sin\zeta)^2\left(\frac{dp}{dx}\right)+((1+pp)\sin\zeta-pq\cos\zeta)^2\left(\frac{dq}{dy}\right)+2((1+qq)\cos\zeta-pq\sin\zeta)((1+pp)\sin\zeta-pq\cos\zeta)\left(\frac{dp}{dy}\right)}$$

Corollaire I.

6. Voilà donc la grandeur du rayon osculateur, tant pour tous les points de la surface que pour toutes les sections faites perpendiculairement à la surface dans chacun de ses points, le point Z de la surface étant déterminé par les quantités p & q, & la diversité des sections par l'angle ζ.

Corollaire II.

7. Le point Z de la surface étant donné avec la position de la droite ZP, qui y est perpendiculaire à la surface, chaque ligne droite EF tirée par le point P fournit une telle section faite selon le plan EPZ.

Remarque.

8. Parmi toutes ces sections nous pourrons regarder comme la principale celle dont la ligne EF passe par le point Y de la base, & partant dont le plan même est perpendiculaire sur la base. Alors, puisque l'intervalle YT évanouït, pour l'angle FEL $=\zeta$, nous avons cette détermination $p\sin\zeta - q\cos\zeta = 0$, & partant $\sin\zeta = \frac{q}{\sqrt{(pp+qq)}}$, & $\cos\zeta = \frac{p}{\sqrt{(pp+qq)}}$: substituant ces valeurs, nous aurons pour le rayon osculateur de cette

section

section principale

$$\frac{-(pp+qq)(1+pp+qq)^{\frac{3}{2}}}{pp\left(\frac{dp}{dx}\right)+qq\left(\frac{dq}{dy}\right)+2pq\left(\frac{dp}{dy}\right)},$$

laquelle expression est d'autant plus remarquable, qu'elle paroit la plus simple de toutes les sections faites par le point Z. Cependant cette autre section, où l'intervalle PT $= p \operatorname{cos} \zeta + q \operatorname{sin} \zeta$ évanouit, & l'intersection EF est perpendiculaire à la ligne PY, semble encore surpasser en simplicité celle-là. Car, puisque $\operatorname{sin} \zeta = \frac{p}{\sqrt{(pp+qq)}}$, & $\operatorname{cos} \zeta = \frac{-q}{\sqrt{(pp+qq)}}$, le rayon osculateur est exprimé par cette formule

$$\frac{-(pp+qq)(1+pp+qq)^{\frac{3}{2}}}{qq\left(\frac{dp}{dx}\right)+pp\left(\frac{dq}{dy}\right)-2pq\left(\frac{dp}{dy}\right)},$$

où il est bon d'observer que cette section est perpendiculaire à la précédente.

PROBLEME III.

2. *Une surface quelconque étant proposée, trouver le rayon osculateur pour une section* EPZ, *qui fait avec la section principale* YPZ *un angle donné* $= \Phi$. Planche IV. Fig. 3.

SOLUTION.

Pour la position de la section principale YPZ, nous venons de trouver YM $= pz$, & MP $= qz$, donc YP $= z\sqrt{(pp+qq)}$, & partant

$$\operatorname{sin} YPM = \frac{p}{\sqrt{(pp+qq)}}, \quad \& \operatorname{cos} YPM = \frac{q}{\sqrt{(pp+qq)}}.$$

En-

Enſuite, à cauſe de ZP $= z\sqrt{(1+pp+qq)}$, nous aurons

$$\sin YPZ = \frac{1}{\sqrt{(1+pp+qq)}}, \quad \& \cos YPZ = \frac{\sqrt{(pp+qq)}}{\sqrt{(1+pp+qq)}}.$$

Soit à préſent Φ l'angle que fait la nouvelle ſection EPZ avec la principale YPZ, que nous ſuppoſons être tournée vers l'axe AL, de ſorte que, ſi l'angle Φ tendoit à l'autre côté on le devroit prendre négatif. Or, pour introduire dans le calcul cette inclinaiſon Φ, puisque le plan YPZ eſt perpendiculaire à la baſe, tirons YS en ſorte, que l'angle PYS ſoit droit, afin que cette ligne YS ſoit perpendiculaire au plan YPZ: qu'on tire de plus dans ce plan la ligne YR perpendiculaire: ſoit PZ, & nous aurons

$$YR = \frac{z\sqrt{(pp+qq)}}{\sqrt{(1+pp+qq)}}, \quad \& \; PR = \frac{z(pp+qq)}{\sqrt{(1+pp+qq)}},$$

& parce que la ligne SR ſera auſſi perpendiculaire à la ligne PZ, qui eſt l'interſection de nos deux plans, l'angle YRS en meſure l'inclinaiſon, de ſorte que YRS $= \Phi$. De là on tire

$$YS = YR \operatorname{tang}\Phi = \frac{z \operatorname{tang}\Phi \sqrt{(pp+qq)}}{\sqrt{(1+pp+qq)}},$$

& partant

$$PS = z\sqrt{\left(pp+qq+\frac{\operatorname{tang}\Phi^2(pp+qq)}{1+pp+qq}\right)} = \frac{z\sqrt{((pp+qq)(1+pp+qq)+\operatorname{tang}\Phi^2)}}{\sqrt{(1+pp+qq)}},$$

d'où nous concluons l'angle EPY, en ſorte que

$$\operatorname{tang} EPY = \frac{\operatorname{tang}\Phi}{\sqrt{(1+pp+qq)}}.$$

Donc, puisque tang YPM $= \frac{p}{q}$, nous aurons

$$\operatorname{tang} EPM = \frac{p\sqrt{(1+pp+qq)} - q \operatorname{tang}\Phi}{q\sqrt{(1+pp+qq)} + p \operatorname{tang}\Phi} = \cot PEL = \frac{\cos\zeta}{\sin\zeta},$$

en poſant comme ci-deſſus l'angle LEP $= \zeta$.

Poſons

Posons pour abréger

$$\sqrt{(pp+qq)(1+pp+qq+\tan\Phi^2)} = r,$$

& nous trouvons:

$$p\sin\zeta - q\cos\zeta = \frac{(pp+qq)\tan\Phi}{r} = \frac{\tan\Phi\sqrt{(pp+qq)}}{\sqrt{(1+pp+qq+\tan\Phi^2)}},$$

donc

$$1+(p\sin\zeta - q\cos\zeta)^2 = \frac{\sec\Phi^2(1+pp+qq)}{1+pp+qq+\tan\Phi^2}.$$

Ensuite

$$(1+qq)\cos\zeta - pq\sin\zeta = \frac{p-q\tan\Phi.\sqrt{(1+pp+qq)}}{r}.\sqrt{(1+pp+qq)},$$

$$\&\ (1+pp)\sin\zeta - pq\cos\zeta = \frac{q+p\tan\Phi.\sqrt{(1+pp+qq)}}{r}.\sqrt{(1+pp+qq)},$$

à cause de

$$\sin\zeta = \frac{q\sqrt{(1+pp+qq)}+p\tan\Phi}{r},\ \&\ \cos\zeta = \frac{p\sqrt{(1+pp+qq)}-q\tan\Phi}{r},$$

Substituons maintenant ces valeurs dans l'expression précédente, & le rayon osculateur de la section EPZ sera:

$$\frac{-(pp+qq)(1+pp+qq)^{\frac{3}{2}}\sec.\varphi^2}{\left(\frac{dp}{dx}\right)(p-q\tan\varphi.\sqrt{(1+pp+qq)})^2+\left(\frac{dq}{dy}\right)(q+p\tan\varphi.\sqrt{(1+pp+qq)})^2+2\left(\frac{dp}{dy}\right)(p-q\tan\varphi.\sqrt{(1+pp+qq)})(q+p\tan\varphi.\sqrt{(1+pp+qq)})}$$

Corollaire I.

10. Pour abréger cette formule, posons $\sqrt{(1+pp+qq)} = u$, & l'expression pour notre rayon osculateur deviendra:

$$\frac{-u^3(pp+qq)\sec.\Phi^2}{(p-qu\tan\Phi)^2\left(\frac{dp}{dx}\right)+(q+pu\tan\Phi)^2\left(\frac{dq}{dy}\right)+2(p-qu\tan\Phi)(q+pu\tan\Phi)\left(\frac{dp}{dy}\right)}$$

qui

qui se réduit à celle-ci :

$$\frac{-u^3(pp+qq)}{(p\cos\phi-qu\sin\phi)^2\left(\frac{dp}{dx}\right)+(q\cos\phi+pu\sin\phi)^2\left(\frac{dq}{dy}\right)+2(p\cos\phi-qu\sin\phi)(q\cos\phi+pu\sin\phi)\left(\frac{dp}{dy}\right)}$$

Corollaire II.

11. Si nous posons ensuite

$$p\cos\phi - qu\sin\phi = s(q\cos\phi + pu\sin\phi),$$

notre expression pour le rayon osculateur deviendra encore plus simple, & se réduit à celle-ci :

$$\frac{-u^3(pp+qq)}{(q\cos\phi+pu\sin\phi)^2\left(ss\left(\frac{dp}{dx}\right)+\left(\frac{dq}{dy}\right)+2s\left(\frac{dp}{dy}\right)\right)},$$

où l'on a $\frac{\sin\phi}{\cos\phi} = \frac{p-sq}{u(q+sp)}$, & de là cette expression devient

$$\frac{-u(1+qq+2spq+ss(1+pp))}{ss\left(\frac{dp}{dx}\right)+\left(\frac{dq}{dy}\right)+2s\left(\frac{dp}{dy}\right)},$$

où, prenant s à volonté, on en connoitra aisément l'inclinaison ϕ, que la section fait avec la section principale.

Corollaire III.

12. Ici il se présente d'abord deux sections fort remarquables, l'une ou $s=0$, ou bien $\tang\phi = \frac{p}{qu}$, donc

$$\sin\phi = \frac{p}{\sqrt{(pp+qq)(1+qq)}}, \quad \& \cos\phi = \frac{q\sqrt{(1+pp+qq)}}{\sqrt{(pp+qq)(1+qq)}},$$

pour laquelle le rayon osculateur est $= \frac{-u(1+qq)}{\left(\frac{dq}{dy}\right)}$.

L'autre

L'autre section est où $s = \infty$, & tang $\phi = \frac{-q}{pu}$, donc

$$\sin\phi = \frac{p}{\sqrt{(pp+qq)(1+pp)}}, \ \& \ \cos\phi = -\frac{p\sqrt{(1+pp+qq)}}{\sqrt{(pp+qq)(1+pp)}},$$

pour laquelle le rayon osculateur est $= -\frac{u(1+pp)}{\left(\frac{dp}{dx}\right)}$. Or la tangente de l'inclinaison mutuelle de ces deux sections est $= -\frac{1}{pq}$, en supposant celle de la derniere avec la principale plus grande.

Corollaire IV.

13. Pour le même point Z de la surface, tous les rayons osculateurs des diverses sections ne sauroient être égaux entr'eux, à moins que ces trois formules $\left(\frac{dp}{dx}\right)$, $\left(\frac{dq}{dy}\right)$, $\left(\frac{dp}{dy}\right)$, ne soient proportionelles à ces trois expressions $1+pp$, $1+qq$, pq: ou bien à moins que ces trois équations n'ayent lieu.

$$\left(\frac{dp}{dx}\right) = R(1+pp); \ \left(\frac{dq}{dy}\right) = R(1+qq), \ \& \ \left(\frac{dp}{dy}\right) = \left(\frac{dq}{dx}\right) = Rpq,$$

ou $pq\left(\frac{dp}{dx}\right) = (1+pp)\left(\frac{dq}{dx}\right)$, & $pq\left(\frac{dq}{dy}\right) = (1+qq)\left(\frac{dp}{dy}\right)$.

Remarque.

14. La derniere formule est la plus commode pour en faire l'application à des cas proposés quelconques. L'équation pour la surface étant réduite par la différentiation à cette forme $dz = pdx + qdy$, on aura pour le rayon osculateur d'une section quelconque faite perpendiculairement à la surface au point Z sera exprimé par cette formule

$$\frac{-(1+qq+2spq+ss(1+pp))\sqrt{(1+pp+qq)}}{\left(\frac{dq}{dy}\right)+2s\left(\frac{dp}{dy}\right)+ss\left(\frac{dp}{dx}\right)},$$

où la lettre s marque toutes les valeurs possibles, chaque valeur appartenant à une section déterminée : savoir, ayant fixé la section principale, qui est en même tems perpendiculaire à la base, la section qui répond à la lettre s est inclinée à celle-là d'un angle ϕ, en sorte que

$$\text{tang}\ \phi = \frac{p - sq}{(q + sp)\sqrt{(1 + pp + qq)}},$$

en supposant cet angle tourné vers l'axe A L. Ou bien cet angle ϕ étant donné, il faut prendre s en sorte qu'il soit

$$s = \frac{p \cos\phi - q \sin\phi . \sqrt{(1 + pp + qq)}}{q \cos\phi + p \sin\phi . \sqrt{(1 + pp + pp)}}.$$

Quelques exemples serviront à nous mieux éclaircir sur cette recherche.

Exemple I.

15. Soit le solide proposé un cylindre couché par son axe sur le plan fixe de la base, & posant le rayon de sa base $= a$, on aura cette équation $z = \sqrt{(aa - yy)}$, d'où l'on tire par la différentiation $dz = \frac{-y\,dy}{\sqrt{(aa - yy)}}$, de sorte que $p = 0$, & $q = \frac{-y}{\sqrt{(aa - yy)}}$, donc

$$\sqrt{(1 + pp + qq)} = \frac{a}{\sqrt{(aa - yy)}},$$

& les formules différentielles.

$$\left(\frac{dp}{dx}\right) = 0; \quad \left(\frac{dp}{dy}\right) = 0; \quad \left(\frac{dq}{dy}\right) = \frac{-aa}{(aa - yy)^{\frac{3}{2}}}.$$

La section principale étant perpendiculaire à l'axe du cylindre pour une

une autre section quelconque, qui est inclinée à la principale de l'angle $= \phi$, il faut prendre $s = \frac{-a \tang \phi}{\sqrt{(aa - yy)}}$: & alors le rayon osculateur sera:

$$-\frac{(1 + qq + ss)}{-aa : (aa - yy)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{a}{\sqrt{(aa - yy)}} = \frac{1 + qq + ss}{a} (aa - y^2),$$

qui se réduit à cette forme: $a(1 + \tang \phi^2) = \frac{a}{\cos \phi^2}$; d'où l'on voit que pour la section principale le rayon osculateur est $= a$, à cause de $\phi = 0$, & pour la section qui y est perpendiculaire & passe par l'axe du cylindre, il devient infini: ce qui marque que la section est une ligne droite.

Remarque.

16. Si, au lieu d'une base circulaire, on donne au cylindre une base quelconque, l'abscisse x, avec la lettre p, n'entre pas non plus en compte; & puisque l'équation pour ce corps est la même que celle pour sa base $dz = q dy$, où q est une fonction de y, on trouve pour tous les rayons osculateurs à chaque point cette expression

$$-\frac{dy(1 + qq)\sqrt{(1 + qq)}}{dq \cos \phi^2},$$

d'où l'on voit comment la courbure decroit à mesure que les sections s'écartent de la principale qui est perpendiculaire à l'axe, & où le rayon osculateur est le plus petit $= -\frac{dy}{dq}(1 + qq)^{\frac{3}{2}}$.

EXEMPLE II.

17. Soit le solide proposé un cone, dont l'axe est couché sur le plan fixe selon la direction AL, le sommet étant en A, & l'équation sera $z = \sqrt{(nnxx - yy)}$, posant nx pour le rayon de la section perpendiculaire à l'axe du cone au point X. Donc, puisque $dz = \frac{nnxdx - ydy}{\sqrt{(nnxx - yy)}}$, nous aurons

$$p = \frac{nnx}{\sqrt{(nnxx - yy)}}; \quad \& \; q = \frac{-y}{\sqrt{(nnxx - yy)}},$$

& partant $\sqrt{(1 + pp + qq)} = \frac{nx\sqrt{(1 + nn)}}{\sqrt{(nnxx - yy)}}$. Ensuite les formules différentielles

$$\left(\frac{dq}{dy}\right) = \frac{-nnxx}{(nnxx - yy)^{\frac{3}{2}}}; \quad \left(\frac{dp}{dy}\right) = \frac{nnxy}{(nnxx - yy)^{\frac{3}{2}}}, \quad \left(\frac{dp}{dx}\right) = \frac{-nnyy}{(nnxx - yy)^{\frac{3}{2}}},$$

d'où l'expression générale pour le rayon osculateur résulte

$$\frac{nnxx - 2nnsxy + nn(1 + nn)ssxx - ssyy}{xx - 2sxy + ssyy} \cdot \frac{x\sqrt{(1 + nn)}}{n}.$$

Or, pour la section principale, le point P où tombe la perpendiculaire ZP on a AL $= (1 + nn)x$, & LP $= 0$, de sorte que la section principale se trouve dans le plan ZYL. Donc, pour toute autre section qui y est inclinée de l'angle ϕ, il faut prendre

$$s = \frac{nxy \sin\phi \sqrt{(1 + nn)} + nnx \cos\phi . \sqrt{(nnxx - yy)}}{n^3 xx \sin\phi \sqrt{(1 + nn)} - y \cos\phi . \sqrt{(nnxx - yy)}},$$

& si l'on substitue cette valeur dans l'expression trouvée pour le rayon osculateur, on aura

$$\frac{yy + n^4 xx}{(n \sin\phi . \sqrt{(nnxx - yy)} - y \cos\phi . \sqrt{(1 + nn)})^2} \, nx\sqrt{(1 + nn)}.$$

Sans restraindre la solution on peut supposer $y = 0$, où la section principale passe par l'axe du cone, & pour toute autre section perpendiculaire à la surface du cone, le rayon osculateur sera

$$= \frac{nx\sqrt{(1 + nn)}}{\sin\phi^2}.$$

Exemple III

18. Soit le solide proposé un ellipsoïde quelconque exprimé par l'équation $zz = aa - mxx - nyy$, dont le centre étant en

en A, les trois demi-axes principaux ſont $AB = \frac{a}{\surd m}$, $AC = \frac{a}{\surd n}$, Fig. 4.
& $AD = a$, perpendiculaires entr'eux: où les quarts elliptiques BAC, BAD, & CAD repréſentent les trois ſections principales faites par le centre A. Maintenant, pour un point quelconque Z de la ſurface, l'équation $z = \surd(aa - mxx - nyy)$, entre les coordonnées $AX = x$, $XY = y$, & $YZ = z$, donne

$$p = \frac{-mx}{\surd(aa - mxx - nyy)} = \frac{-mx}{z}; \quad q = \frac{-ny}{\surd(aa - mxx - nyy)} = \frac{-ny}{z}.$$

Donc, tirant par Z la droite ZP perpendiculaire à la ſurface elliptique, on aura

$$AL = x + pz = (1 - m)x, \quad \& \; PL = y + qz = (1 - n)y,$$

& la ſection principale en Z ſe faiſant ſelon le plan PYZ, ſon interſection avec la baſe BAC, ou bien la ligne PY, fera avec l'axe AB un angle dont la tangente eſt $= \frac{XY - LP}{LX} = \frac{ny}{mx}$. Or toutes les autres ſections faites par le point Z doivent paſſer par la ligne ZP; poſant donc ϕ l'inclinaiſon d'une telle ſection quelconque à la principale PZY, le rayon oſculateur de cette ſection en Z ſera déterminé de la maniere ſuivante.

$$\surd(1 + pp + qq) = \frac{\surd(aa - m(1 - m)xx - n(1 - n)yy)}{\surd(aa - mxx - nyy)} = u.$$

Poſant donc pour abréger

$$\surd(aa - m(1 - m)xx - n(1 - n)yy) = v,$$

on a $u = \frac{v}{z}$. Enſuite nous avons:

$$\left(\frac{dp}{dx}\right) = \frac{-m(aa - nyy)}{z^3}; \quad \left(\frac{dp}{dy}\right) = \frac{-mnxy}{z^3}; \quad \left(\frac{dq}{dy}\right) = \frac{-n(aa - mxx)}{z^3},$$

$$\& \; pp + qq = \frac{mmxx - nnyy}{zz}.$$

Ser-

Servons nous plutôt de la formule trouvée dans le §. 10. que de celle, qui en a été derivée, & ayant

$$p\cos\phi - qv\sin\phi = \frac{-mx}{z}\cos\phi + \frac{nvy}{zz}\sin\phi = \frac{-mxz\cos\phi + nyv\sin\phi}{zz},$$

$$q\cos\phi + pv\sin\phi = \frac{-ny}{z}\cos\phi - \frac{mvx}{zz}\sin\phi = \frac{-nyz\cos\phi - mxv\sin\phi}{zz},$$

le rayon osculateur sera exprimé par une fraction, dont le numérateur est $= v^3 zz(mmxx + nnyy)$, & le dénominateur

$$+m(aa - nyy)(mmxxzz\cos\phi^2 - 2mnxyvz\sin\phi\cos\phi + nnyyvv\sin\phi^2)$$
$$+n(aa - mxx)(nnyyzz\cos\phi^2 + 2mnxyvz\sin\phi\cos\phi + mmxxvv\sin\phi^2)$$
$$+2mnxy(mnxyzz\cos\phi^2 + (mmxx - nnyy)vz\sin\phi\cos\phi - mnxyvv\sin\phi^2)$$

qui se réduit à cette forme:

$$+ zz\cos\phi^2(aa(m^3xx + n^3yy) - mn(m-n)^2xxyy)$$
$$- 2mn(m-n)xyvz^3\sin\phi\cos\phi$$
$$+ mnvvzz\sin\phi^2(mxx + nyy),$$

Donc, divisant le numérateur & le dénominateur par zz, nous aurons le rayon osculateur:

$$\frac{v^3(mmxx + nnyy)}{aa(m^3xx + n^3yy)c\!f\phi^2 - mn(m-n)^2xxyyc\!f\phi^2 - 2mn(m-n)xyvz\,f\phi\,c\!f\phi + mnvv(mxx + nyy)f\phi^2}$$

Ou bien, si nous posons ce rayon osculateur $= R$, nous aurons

$$\frac{1}{R} = \frac{aa(m^3xx + n^3yy) - mn(m-n)^2xxyy}{v^3(mmxx + nnyy)}c\!f\phi^2 - \frac{2mn(m-n)xyz}{vv(mmxx + nnyy)}f\phi\,c\!f\phi + \frac{mn(mxx + nyy)}{v(mmxx + nnyy)}f\phi^2$$

Corollaire I.

19. Si nous posons $m = 1$, & $n = 1$, nous aurons le cas d'un globe dont le rayon $= a$, & puisque $v = a$, le rayon osculateur sera $\dfrac{a^3(xx + yy)}{aa(xx + yy)\cos\phi^2 + aa(xx + yy)\sin\phi^2} = a$, tout comme la nature de ce solide l'exige.

Co-

COROLLAIRE II.

20. Si $m = n$, & partant AB = AC $= \frac{a}{\sqrt{n}}$, donc notre solide sera un sphéroïde allongé ou applati, formé par la revolution de l'ellipse ABD autour de l'axe AD, la base ABC devenant un cercle. Dans ce cas le rayon osculateur sera

$$R = \frac{v^3}{naa\cos\Phi^2 + nvv\sin\Phi^2} = \frac{(naa+(1-n)zz)^{\frac{3}{2}}}{naa\cos\Phi^2 + nnaa\sin\Phi^2 + n(1-n)zz\sin\Phi^2}.$$

Donc, pour le point D, où $x = 0$, $y = 0$, $z = a$, & $v = a$, on aura $R = \frac{a}{n}$; mais, pour tous les points pris dans le cercle BC, ou l'équateur où $z = 0$, il y aura

$$R = \frac{a\sqrt{n}}{\cos\Phi^2 + n\sin\Phi^2}.$$

COROLLAIRE III.

21. Mais en général, quelle que soit la forme de l'ellipsoïde pour un point quelconque M de la base BMC, où $z = 0$, & $aa = mxx + nyy$, donc $vv = mmxx + nnyy$, l'expression pour le rayon osculateur y sera

$$R = \frac{v^3}{vv\cos\Phi^2 + nnaa\sin\Phi^2},$$

& partant, pour la section principale qui est perpendiculaire à la base où $\Phi = 0$, on a $R = v$, & pour la section faite par la base même $R = \frac{v^3}{nnaa}$, qui est le rayon osculateur de la courbe BMC au point M.

Remarque.

22. Dans ce cas il est remarquable que les rayons osculateurs ne sauroient être immédiatement tirés pour le sommet D. Il y faudroit

droit mettre $x = 0$, & $y = 0$, donc $z = a$, & $v = a$. Or, faiſant ces ſubſtitutions, tant le numérateur que le dénóminateur de notre formule évanouïr, & on n'en ſauroit tirer aucune conclusion. La raiſon en eſt que dans ce cas la ſection principale à laquelle ſe rapportent les autres par l'angle Φ, devient indéterminée, puisque toutes les ſections faites par le ſommet D ſont également perpendiculaires à la baſe BAC. Donc, pour en fixer une qui ſoit la principale ne poſons d'abord que $y = 0$, & conſidérons le point N où

$$z = \sqrt{(aa - mxx)}, \quad \& \quad v = \sqrt{(aa - m(1 - m)xx)}.$$

Maintenant il n'eſt pas douteux, que la ſection principale ne ſe trouve dans le plan BNDA, & que pour toute autre ſection inclinée à celle-ci de l'angle Φ, le rayon oſculateur ne ſoit:

$$\frac{mmv^3}{m^3 aa \cos\Phi^2 + mmnvv \sin\Phi^2} = \frac{v^3}{maa \cos\Phi^2 + nvv \sin\Phi^2}.$$

A préſent poſons auſſi $x = 0$, pour avoir le ſommet D, dont on conſidere la ſection principale dans le plan DAB, & puiſque $v = a$, nous aurons $R = \frac{a}{m \cos\Phi^2 + n \sin\Phi^2}$.

Donc, pour la ſection faite dans le plan DAB, le rayon oſculateur ſera $= \frac{a}{m}$, le même que de la courbe BD au point D; & pour la ſection faite dans le plan DCA, il ſera $= \frac{a}{n}$, le même que de la courbe CD au point D.

Conclusion.

23. Après ces exemples rapportés pour éclaircir les recherches précédentes, on peut tirer la concluſion ſuivante pour juger de la courbure de toutes les ſurfaces en général. Qu'on conſidere le plan qui touche la ſurface au point où l'on veut connoitre la courbure. Soit le plan
Fig. 5. de la planche ce plan, qui touche la ſurface au point Z, & toutes les ſections

sections pour lesquelles je viens de définir les rayons osculateurs, seront perpendiculaires à ce plan, & le couperont par quelque ligne droite EF, ou MN, qui passe par le point Z; de sorte que toutes les sections possibles soient représentées par quelque ligne droite tirée par le point Z, sur le plan touchant. Soit EF la section, que j'ai nommée ci-dessus la principale, & considérant une autre section quelconque MN, qui fasse avec celle-là un angle EZM $= \phi$, & puisque le rayon osculateur de cette section MN a été trouvé au §. 10.

$$\frac{-u^3(pp+qq)}{(p\cos\phi - qu\sin\phi)^2\left(\frac{dp}{dx}\right)+(q\cos\phi+pu\sin\phi)^2\left(\frac{dq}{dy}\right)+2(p\cos\phi-qu\sin\phi)(q\cos\phi+pu\sin\phi)\left(\frac{dp}{dy}\right)}$$

le dénominateur de cette expression se dévelope en cette forme:

$$+\cos\phi^2.\left(pp\left(\frac{dp}{dx}\right)+qq\left(\frac{dq}{dy}\right)+2pq\left(\frac{dp}{dy}\right)\right)$$

$$+2u\sin\phi\cos\phi\left(-pq\left(\frac{dp}{dx}\right)+pq\left(\frac{dq}{dy}\right)+(pp-qq)\left(\frac{dp}{dy}\right)\right)$$

$$+uu\sin\phi^2.\left(qq\left(\frac{dp}{dx}\right)+pp\left(\frac{dq}{dy}\right)-2pq\left(\frac{dp}{dy}\right)\right)$$

où il faut remarquer que les quantités u, p, q, avec les formules $\left(\frac{dp}{dx}\right)$, $\left(\frac{dq}{dy}\right)$, & $\left(\frac{dp}{dy}\right)$, appartiennent uniquement à la détermination du point Z, & sont par conséquent communes à toutes les sections, dont la variété est renfermée dans le seul angle ϕ. Donc en général, l'expression de tous les rayons osculateurs pour quelque surface que ce soit, doit toujours avoir cette forme

$$\frac{V}{P\cos\phi^2+Q\sin\phi^2+2R\sin\phi\cos\phi},$$

 qui

qui, à cause de $\cos\phi^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\phi$, $\sin\phi^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\phi$, & $\sin\phi \cos\phi = \frac{1}{2}\sin 2\phi$, se réduit à celle-ci

$$\frac{1}{L + M\cos 2\phi + N\sin 2\phi},$$

qui me fournit les réflexions suivantes.

I Réflexion.

24. C'est donc cette formule qui renferme la nature de la courbure des surfaces à chacun de leurs points. Il est évident que cette formule peut varier à l'infini, à cause de l'infinité des valeurs dont chacune de ces trois lettres L, M, & N, est susceptible, & deux élémens d'une même ou de différentes surfaces ne sauroient être estimés avoir la même courbure, à moins que ces trois lettres n'aient les mêmes valeurs de part & d'autre ou qu'elles n'y soient réductibles en augmentant ou diminuant l'angle ϕ d'une quantité constante. Car, puisque la section EF est arbitraire, l'identité de courbure en deux élémens subsiste également, quoique les angles ϕ de l'un & de l'autre ne commencent point de la même section, pourvu que la loi suivant laquelle les rayons osculateurs augmentent ou diminuent soit la même dans tous les deux.

II Réflexion.

25. Mais il faut ici principalement observer, que, dès qu'on connoit les rayons osculateurs pour trois sections différentes, ceux pour toutes les autres en sont parfaitement déterminés. Soient a, b, c, les rayons osculateurs pour les trois sections, qui répondent aux angles α, β, γ, pris pour ϕ, & ces trois équations:

$$\frac{1}{a} = L + M\cos 2\alpha + N\sin 2\alpha;$$

$$\frac{1}{b} = L + M\cos 2\beta + N\sin 2\beta, \quad \&$$

$$\frac{1}{c} = L + M\cos 2\gamma + N\sin 2\gamma,$$

nous

nous découvriront les valeurs des trois lettres L, M, & N, lesquelles étant substituées dans notre formule déterminent les rayons osculateurs pour toutes les autres sections. Par conséquent dès que deux élémens se ressemblent par rapport aux trois rayons osculateurs, qui repondent à des sections également inclinées entr'elles de part & d'autre, toute la courbure de ces deux élémens est parfaitement la même.

III Réflexion.

26. De notre formule générale nous pourrons assigner les sections auxquelles répondent le plus grand & le plus petit rayon osculateur. La méthode des plus grands & plus petits nous fournissant cette égalité

$$-2M \sin 2\phi + 2N \cos 2\phi = 0,$$

nous en tirons $\tang 2\phi = \frac{N}{M}$. Donc, si ζ est l'angle dont la tangente est $= \frac{N}{M}$, l'angle $180° + \zeta$, convient également, & de là nous trouvons ces deux valeurs pour l'angle ϕ.

$$\text{I. } \phi = \tfrac{1}{2}\zeta, \quad \& \quad \text{II. } \phi = 90° + \tfrac{1}{2}\zeta,$$

dont l'un répond au plus grand rayon osculateur & l'autre au plus petit: d'où l'on tire cette conséquence bien importante, que, quelle que soit la courbure d'un élément, les deux sections, dont l'une contient la plus grande courbure & l'autre la plus petite, sont toujours normales entr'elles.

IV Réflexion.

27. Donc, si le plus grand rayon osculateur convient à la section EF, le plus petit se trouvera certainement dans la section GH, qui y est perpendiculaire, & réciproquement. Supposons donc que EF soit une de ces sections, où le rayon osculateur est le plus grand ou le plus petit; & pour toute autre section MN, qui y est inclinée de

 l'angle

l'angle EZM $= \phi$, le rayon osculateur sera nécessairement $= \frac{1}{L + M \cos 2\phi}$, la quantité N devant évanouïr pour cette situation, puisque d'ailleurs les plus grand & plus petit ne répondroient point aux valeurs $\phi = 0$, & $\phi = 90°$, comme nous le supposons.

V Réflexion.

28. Pour comparer donc les courbures de deux élémens entr'elles, on n'à qu'à chercher pour chacun les sections qui donnent le plus grand & le plus petit rayon osculateur, & si l'on trouve ces deux rayons les mêmes dans l'une & l'autre, on peut prononcer hardiment, que ces deux élémens sont doués de la même courbure. Et partant, pour connoitre la véritable courbure d'un élément quelconque de surface, il suffit d'en chercher le plus grand & le plus petit rayon osculateur: puisque ceux de toutes les autres sections en sont déterminés parfaitement, en sorte qu'aucune variété n'y sauroit plus avoir lieu.

VI Réflexion.

30. Soit le plus grand rayon osculateur $= f$, qui convienne à la section EF, & le plus petit $= g$, pour la section GH perpendiculaire à la précédente. Cela posé, pour toute autre section MN inclinée à la premiere EF de l'angle EZM $= \phi$, le rayon osculateur qui soit $= r$, sera déterminé uniquement des deux précédens, & l'angle ϕ de la maniere suivante. La formule générale

$$r = \frac{1}{L + M \cos 2\phi},$$

posant $\phi = 0$, donne $L + M = \frac{1}{f}$, or posant $\phi = 90°$, il en résulte $L - M = \frac{1}{g}$, d'où l'on tire $L = \frac{f+g}{2fg}$, & $M = \frac{-(f-g)}{2fg}$, & partant nous aurons: $r = \frac{2fg}{f + g - (f - g)\cos 2\phi}$.

Pour

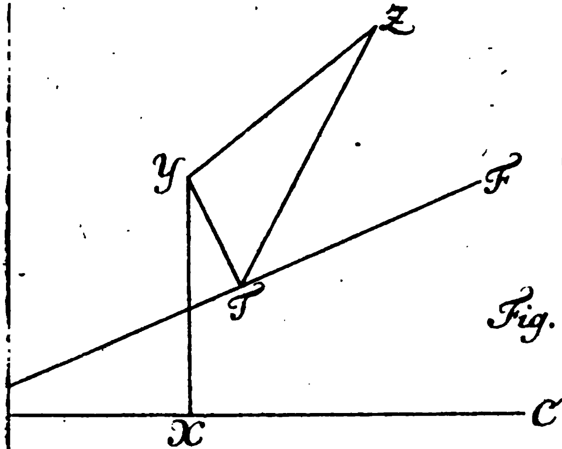


Fig. 1.

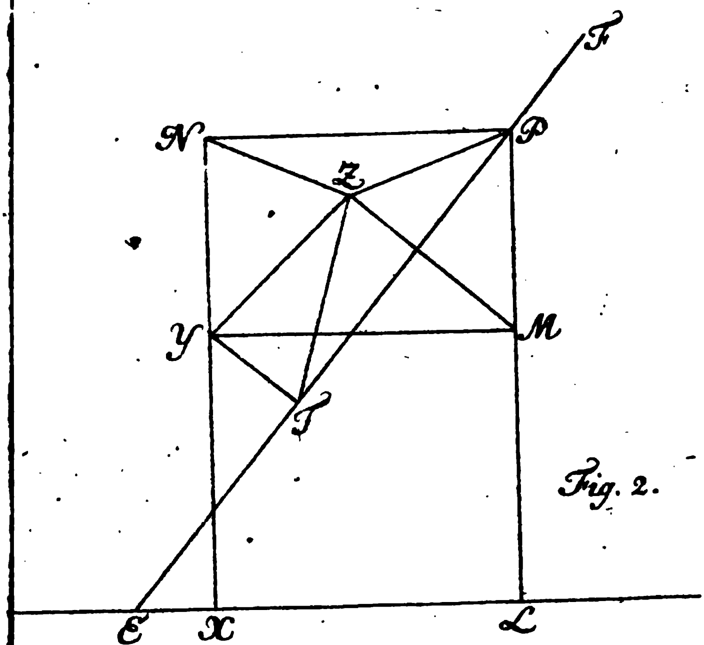


Fig. 2.

Mem. de l'Acad. 1760. Pl. 3. p. 143.

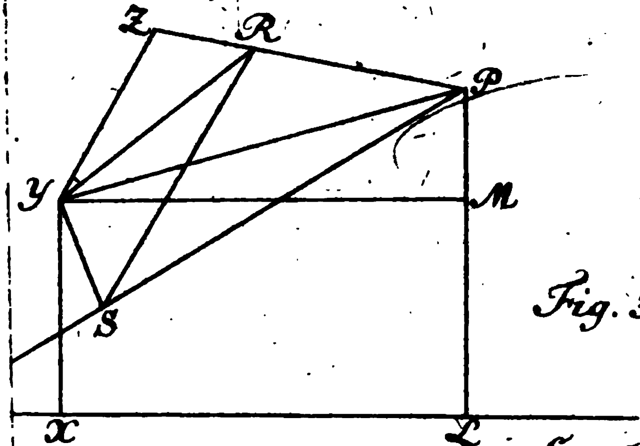
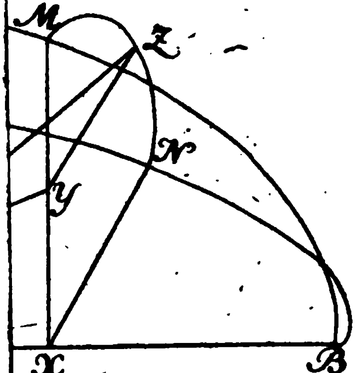


Fig. 3.

.4.



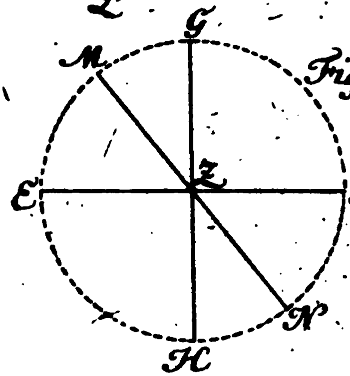
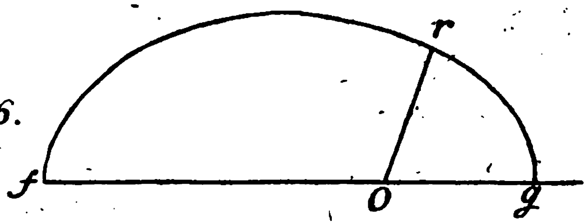


Fig. 5.

Fig. 6.



Mem. de l'Acad. 1760. Pl. 4. pag. 143.

Pour donner une conſtruction aiſée de cette formule, qu'on joigne enſemble le plus grand rayon oſculateur & le plus petit en prenant $Of = f$, & $Og = g$, & qu'on décrive ſur la ligne fg, une demi-ellipſe dont un foyer ſoit au point O: alors, pour la ſection MN on n'a qu'à prendre l'angle fOr, le double de l'angle EZM, & la ligne Or ſera égale au rayon oſculateur pour la ſection MN. Ainſi le jugement ſur la courbure des ſurfaces, quelque compliqué qu'il ait paru au commencement, ſe réduit pour chaque élément à la connoiſſance de deux rayons oſculateurs, dont l'un eſt le plus grand & l'autre le plus petit dans cet élément; ces deux choſes déterminent entierement la nature de la courbure en nous découvrant la courbure de toutes les ſections poſſibles, qui ſont perpendiculaires ſur l'élément propoſé. Fig. 5. & 6.

Mais, pour juger du plus grand ou plus petit rayon oſculateur, il faut avertir, que ce jugement doit être reglé ſur le réciproque du rayon oſculateur $\frac{1}{R}$, en ſorte que, ſi R eſt tantôt poſitif tantôt négatif, la valeur $R = \infty$, ou $\frac{1}{R} = 0$, n'eſt ni un plus grand ni un plus petit.

Enfin on comprend aiſément, que, comme dans les lignes courbes il y a certaines irrégularités par rapport aux points doubles & multiples, il en faut reconnoitre de ſemblables dans les ſurfaces, qui ne ſont pas aſſujetties à notre regle d'ailleurs générale.

RECHER-

RECHERCHES GÉNÉRALES SUR LA MORTALITÉ ET LA MULTIPLICATION DU GENRE HUMAIN.

PAR M. EULER.

1.

Les régiſtres des naiſſances & des morts à chaque âge, qu'on publie en pluſieurs endroits tous les ans, fourniſſent tant de queſtions différentes ſur la mortalité & la multiplication du genre humain, qu'il ſeroit trop long de les rapporter toutes. Or les unes dépendent pour la plûpart en ſorte des autres, qu'en ayant développé une ou deux, toutes les autres ſe trouvent pareillement déterminées. Comme les ſolutions doivent être tirées des régiſtres mentionnés, il eſt à remarquer, que ces régiſtres différent beaucoup ſelon la diverſité des villes, villages & provinces, où ils ont été dreſſés: & par la même raiſon les ſolutions de toutes ces queſtions ſe trouvent fort différentes ſelon les régiſtres ſur lesquels elles ſont fondées. C'eſt pourquoi je me propoſe de traiter ici en géneral la plupart de ces queſtions ſans me borner aux réſultats que les régiſtres d'un certain endroit fourniſſent: & enſuite il ſera aiſé de faire l'application à chaque endroit qu'on voudra.

2. Or j'obſerve d'abord, que toutes ces queſtions priſes en général dépendent de deux hypotheſes; lesquelles étant bien fixées il eſt aiſé d'en tirer la ſolution de toutes. Je nommerai la premiere l'hypotheſe de la mortalité par laquelle on détermine, combien d'un certain nombre d'hommes, qui ſont nés à la fois, ſeront encore en vie après chaque nombre d'années écoulées. Ici la conſidération de la multiplication n'entre point du tout en compte, & partant il faut conſti-

constituer la seconde hypothese, que je nommerai celle de la multiplication; & par laquelle je marque de combien le nombre de tous les hommes est augmenté ou diminué pendant le cours d'un an. Cette hypothese dépend donc de la quantité des mariages & de la fécondité, pendant que la premiere est fondée sur la vitalité ou le pouvoir de vivre, qui est propre aux hommes.

I. HYPOTHESE

DE LA MORTALITÉ.

3. Pour la premiere hypothese, concevons un nombre quelconque N d'enfans, qui soient nés en même tems; & je marquerai le nombre de ceux qui seront encore en vie au bout d'un an par (1)N, de ceux qui y seront encore au bout de deux ans par (2)N, de trois ans par (3)N, de quatre ans par (4)N, & ainsi de suite. Ce sont des signes généraux que j'emploie pour marquer, comment les nombre des hommes nés en même tems décroit successivement; qui auront pour chaque climat & chaque maniere de vivre des valeurs particulieres. Cependant on peut remarquer que les nombres indiqués par (1), (2), (3), (4), (5), &c. constituent une progression décroissante de fractions, dont la plus grande (1) est moindre que l'unité; & quand on continue ces termes au de là de 100, ils décroitront si fort, qu'ils évanouissent presque entierement. Car, si de 100 millions d'hommes aucun n'atteint l'age de 125 ans, il faut que le terme (125) soit moindre que $\frac{1}{100000000}$.

4. Ayant établi pour un certain lieu par un assez grand nombre d'observations les valeurs des fractions (1), (2), (3), (4), &c. on peut résoudre quantité de questions qu'on propose ordinairement sur la probabilité de la vie humaine. D'abord il est évident, si le nombre des enfans nés en même tems est $=$ N, que selon la probabilité il en mourra tous les ans autant que cette table en marque:

depuis	à	il en mourra
0 ans - -	1	$N - (1)N$,
1 —	2	$(1)N - (2)N$,
2 —	3	$(2)N - (3)N$,
3 —	4	$(3)N - (4)N$,
4 —	5	$(4)N - (5)N$,

&c.

Et comme de ce nombre N il y aura encore probablement en vie $(n)N$ au bout de n ans, il faut que le nombre des morts avant ce terme de n ans soit $= N - (n)N$. Après cette remarque je donnerai la solution des questions suivantes.

I. Question.

5. *Un certain nombre d'hommes dont tous soient du même âge, étant donné, trouver combien en seront probablement encore en vie après un certain nombre d'années.*

Supposons qu'il y ait M hommes, qui ayent le même âge de m ans, & qu'on demande, combien en vivront probablement encore après n ans? Qu'on pose $M = (m)N$ pour avoir $N = \frac{M}{(m)}$, où N marque le nombre de tous les enfans nés en même tems, dont il reste encore en vie M après m ans. Or de ce même nombre seront probablement encore en vie $(m+n)N$ après $m+n$ ans depuis leur naissance, & partant après n ans depuis le tems proposé. Donc le nombre cherché dans la question est $= \frac{(m+n)}{(m)} M$; ou après n ans il y aura probablement encore autant de vivans de M hommes, qui ont tous à présent m ans.

Donc

Donc il eſt probable que du nombre d'hommes M âgés tous de m ans, il en mourra $1 - \frac{(m + n)}{(m)}$, avant qu'il s'en écoulent n ans.

II. QUESTION.

6. *Trouver la probabilité qu'un homme d'un certain age ſoit encore en vie après un certain nombre d'années.*

Que l'homme en queſtion ſoit agé de m ans, & qu'on cherche la probabilité que cet homme ſoit encore en vie au bout de n ans. Concevons M homme du même âge, & puisque, après n ans, il y en aura probablement encore vivans $\frac{(m + n)}{(m)}$ M, la probabilité que l'homme propoſé ſe trouve dans ce nombre ſera $= \frac{(m + n)}{(m)}$.

Donc la probabilité que cet homme vienne à mourir avant le bout de ces n ans, eſt $1 - \frac{(m + n)}{(m)}$. Et partant l'eſpérance, que cet homme peut avoir de ne pas mourir dans l'intervalle des $(m + n)$ années prochaines, eſt à la crainte de mourir dans ce même intervalle comme $(m + n)$ à $(m) - (m + n)$. Donc l'eſpérance ſurpaſſera la crainte ſi $(m + n) > \frac{1}{2}(m)$; & la crainte ſera plus fondée ſi $(m + n) < \frac{1}{2}(m)$. Or la crainte égalera l'eſpérance, ſi $(m + n) = \frac{1}{2}(m)$.

III. QUESTION.

7. *On demande la probabilité, qu'un homme d'un certain âge mourra dans le cours d'une année donnée.*

Que l'homme en queſtion ſoit âgé de m ans, mais qu'il meure avant qu'il parvienne à l'âge de $n + 1$ ans. Pour trouver cette probabilité, concevons un grand nombre d'hommes M du même âge,

& ayant $M = (m)N$, & $N = \frac{M}{(m)}$, il y aura $\frac{(n)}{(m)}$ M hommes, qui atteignent l'âge de n ans, & $\frac{(n+1)}{(m)}$ M, qui atteignent celui de $n + 1$ ans: il en mourra donc probablement dans le cours de cette année $\frac{(n) - (n+1)}{(m)}$ M; & partant la probabilité que l'homme proposé se trouve dans ce nombre sera $= \frac{(n) - (n+1)}{(m)}$.

De là il est évident, pour que ce même homme meure entre l'année $n + \nu$ de son âge, la probabilité sera $= \frac{(n) - (n+\nu)}{(m)}$.

Or, pour que cet homme meure un jour marqué de l'année proposée, la probabilité sera $= \frac{(n) - (n+1)}{365\,(m)}$.

Si la question est d'un enfant nouvellement né, on n'a qu'à écrire 1 au lieu de la fraction (m).

IV. QUESTION.

8. *Trouver le terme, auquel un homme d'un âge donné peut espérer de parvenir, de sorte qu'il est également probable qu'il meure avant ce terme qu'après.*

Soit l'âge de l'homme en question de m ans, & celui qu'il peut espérer d'attendre de z ans, qu'il s'agit de trouver. Or la probabilité qu'il parvienne à cet âge étant $= \frac{(z)}{(m)}$, la probabilité qu'il meure avant ce terme sera $= 1 - \frac{(z)}{(m)}$. Donc, puisque l'une & l'autre probabilité doit être la même, nous aurons cette équation $\frac{(z)}{(m)} = 1 - \frac{(z)}{(m)}$, & partant $(z) = \frac{1}{2}(m)$, dont il est aisé de

trouver

trouver le nombre z, dès qu'on a déterminé par les observations les valeurs de toutes ces fractions:

$$(1), \quad (2), \quad (3), \quad (4), \quad (5), \quad (6), \quad \&c.$$

car on verra d'abord laquelle (z) sera la moitié de la proposée (m).

Ayant trouvé ce nombre z, on nomme l'intervalle $z - m$ la force de la vie d'un homme de m ans.

V. Question.

9. *Déterminer les rentes viageres, qu'il est juste de payer à des hommes d'un âge quelconque tous les ans, jusqu'à leur mort, pour une somme qu'ils auront avancée d'abord.*

Concevons M hommes, qui ayent tous le même âge de m ans, & que chacun paye d'abord la somme a; ce qui fournira un fond $= Ma$. Soit x la somme qu'on doit payer à chacun tous les ans, tant qu'il est en vie, & après un an le fond doit payer $\frac{(m+1)}{(m)} Mx$, après deux ans $\frac{(m+2)}{(m)} Mx$, après trois $\frac{(m+3)}{(m)} Mx$, & ainsi de suite. Or, comptant que le fond soit placé à 5 pour cent, une somme S payable après n ans ne vaut à présent que $\left[\frac{20}{21}\right]^n S$: mais, pour rendre notre détermination plus générale, supposons qu'une somme S croisse par les intérêts dans un an à λS, & $\frac{1}{\lambda}$ sera ce que nous avons marqué par $\frac{20}{21}$, & une somme S payable au bout de n ans ne vaudra à présent que $S : \lambda^n$. De là on dressera le calcul suivant:

	on doit payer	ce qui fait à présent
après 1 an - -	$\frac{(m+1)}{(m)} Mx$ - -	$\frac{(m+1)}{(m)} \cdot \frac{Mx}{\lambda}$,
après 2 ans - -	$\frac{(m+2)}{(m)} Mx$ - -	$\frac{(m+2)}{(m)} \cdot \frac{Mx}{\lambda^2}$,
après 3 ans - -	$\frac{(m+3)}{(m)} Mx$ - -	$\frac{(m+3)}{(m)} \cdot \frac{Mx}{\lambda^3}$,

&c.

Or l'équité exige que toutes ces ſommes réduites au tems préſent ſoient égales au fond entier Ma, d'où l'on tire cette équation:

$$a = \frac{x}{(m)}\left[\frac{(m+1)}{\lambda} + \frac{(m+2)}{\lambda^2} + \frac{(m+3)}{\lambda^3} + \frac{(m+4)}{\lambda^4} + \&c.\right],$$

& partant ce que le fond doit payer par an à chacun des intéreſſans eſt

$$x = \frac{(m)\,a}{\frac{(m+1)}{\lambda} + \frac{(m+2)}{\lambda^2} + \frac{(m+3)}{\lambda^3} + \frac{(m+4)}{\lambda^4} + \&c.}.$$

Sachant donc les valeurs de toutes ces fractions (1), (2), (3), &c. il eſt aiſé de trouver la ſomme x, qui convient à chaque âge de m ans rapportée à un intérêt donné.

VI. Question.

10. *Quand les intéreſſans ſont des enfans nouvellement nés, & que le payement des rentes viageres ne doit commencer, que lorsqu'ils auront atteint un certain age, déterminer la quantité de ces rentes.*

Suppoſons qu'on paye la ſomme a pour chaque enfant nouvellement né, & qu'il ne doive recevoir des rentes, que lorsqu'il aura atteint l'age de n ans, que depuis ce tems on lui paye tous les ans la ſomme

ſomme x, qu'il faut déterminer. Comptant donc les intérêts comme auparavant, on parviendra à cette équation:

$$a = x\left(\frac{(n)}{\lambda^{n}} + \frac{(n+1)}{\lambda^{n+1}} + \frac{(n+2)}{\lambda^{n+2}} + \frac{(n+3)}{\lambda^{n+3}} + \&c.\right),$$

qui fournit

$$x = \frac{a}{\frac{(n)}{\lambda^{n}} + \frac{(n+1)}{\lambda^{n+1}} + \frac{(n+2)}{\lambda^{n+2}} + \frac{(n+3)}{\lambda^{n+3}} + \&c.}$$

D'où il eſt évident qu'une telle rente peut devenir fort avantageuſe, & qu'un homme, lorsqu'il aura atteint un certain âge, peut jouir de rentes conſidérables à peu de fraix pendant toute ſa vie.

11. Toutes ces queſtions ſe réſoudront donc facilement dès qu'on connoitra les valeurs des fractions (1), (2), (3), (4), &c. qui dépendent tant du climat que de la maniere de vivre: auſſi a-t-on remarqué que ces valeurs ſont différentes pour les deux ſexes, de ſorte qu'on ne ſauroit rien déterminer en général. Or, pour les conclure des obſervations, on comprend aiſément, qu'il en faut employer un grand nombre, qui s'étend même ſur toutes ſortes de perſonnes: & à cet égard on ne ſauroit ſe ſervir des régiſtres des rentes viageres, qui commencent par des enfans au deſſous d'un an. Car d'abord, on ne peut pas regarder ces enfans comme nouvellement nés, & la plupart eſt ſans doute déjà échappée aux dangers des premiers mois: & enſuite, on ne s'engagera gueres ſouvent pour des enfans d'une complexion foible, de ſorte qu'on doit regarder comme choiſis les enfans pour lesquels on prend des rentes viageres. Ainſi les valeurs de nos fractions (1), (2), (3), &c. qu'on conclura des régiſtres des rentes viageres ſeront infalliblement trop grandes, ſurtout à l'égard des premiers ans. Cependant, puisqu'il faut regler les rentes ſur de tels régiſtres plutôt que ſur la véritable mortalité, j'ajoûterai les valeurs de nos fractions telles qu'on les tire des obſervations de M. Keerſeboom.

(1) = 0,804	(31) = 0,499	(61) = 0,264	(91) = 0,006
(2) = 0,768	(32) = 0,490	(62) = 0,254	(92) = 0,004
(3) = 0,736	(33) = 0,482	(63) = 0,245	(93) = 0,003
(4) = 0,709	(34) = 0,475	(64) = 0,235	(94) = 0,002
(5) = 0,688	(35) = 0,468	(65) = 0,225	(95) = 0,001
(6) = 0,676	(36) = 0,461	(66) = 0,215	
(7) = 0,664	(37) = 0,454	(67) = 0,205	
(8) = 0,653	(38) = 0,446	(68) = 0,195	
(9) = 0,646	(39) = 0,439	(69) = 0,185	
(10) = 0,639	(40) = 0,432	(70) = 0,175	
(11) = 0,633	(41) = 0,426	(71) = 0,165	
(12) = 0,627	(42) = 0,420	(72) = 0,155	
(13) = 0,621	(43) = 0,413	(73) = 0,145	
(14) = 0,616	(44) = 0,406	(74) = 0,135	
(15) = 0,611	(45) = 0,400	(75) = 0,125	
(16) = 0,606	(46) = 0,393	(76) = 0,114	
(17) = 0,601	(47) = 0,386	(77) = 0,104	
(18) = 0,596	(48) = 0,378	(78) = 0,093	
(19) = 0,590	(49) = 0,370	(79) = 0,082	
(20) = 0,584	(50) = 0,362	(80) = 0,072	
(21) = 0,577	(51) = 0,354	(81) = 0,063	
(22) = 0,571	(52) = 0,345	(82) = 0,054	
(23) = 0,565	(53) = 0,336	(83) = 0,046	
(24) = 0,559	(54) = 0,327	(84) = 0,039	
(25) = 0,552	(55) = 0,319	(85) = 0,032	
(26) = 0,544	(56) = 0,310	(86) = 0,026	
(27) = 0,535	(57) = 0,301	(87) = 0,020	
(28) = 0,525	(58) = 0,291	(88) = 0,015	
(29) = 0,516	(59) = 0,282	(89) = 0,011	
(30) = 0,507	(60) = 0,273	(90) = 0,008	

Or, puisque cette table eſt dreſſée ſur des enfans choiſis, & qui ont même déjà vécu quelques mois depuis leur naiſſance; ſi l'on veut l'appli-

l'appliquer à tous les enfans nouvellement nés dans une ville ou province, il faut diminuer tous ces nombres d'une certaine partie pour tenir compte de la grande mortalité, à laquelle les enfans sont assujettis aussitôt après leur naissance. Mais nous tirerons cette correction plus seurement des observations qui renferment déjà la multiplication, que je m'en vai considérer.

II HYPOTHESE.

DE LA MULTIPLICATION.

12. C'est le principe de la propagation, sur lequel cette hypothese est fondée; d'où il est d'abord évident, que s'il nait tous les ans autant d'enfans, qu'il meurt d'hommes, le nombre de tous les hommes demeurera toujours le même, & qu'il n'y aura point alors de multiplication. Mais, si le nombre des enfans qui naissent tous les ans, surpasse le nombre des morts, chaque année produira une augmentation dans le nombre des vivans, qui sera égale à l'excès des naissans sur les morts. Or cette augmentation se changera en diminution, lorsque le nombre des morts surpasse celui des naissans. De là nous aurons trois cas à considérer: le premier où le nombre des hommes demeure constamment le même; le second, où il augmente tous les ans; & le troisieme, où il diminue tous les ans. Donc, si M marque le nombre de tous les hommes qui vivent à présent, & mM le nombre de ceux qui vivent l'année suivante; le premier cas aura lieu, si $m = 1$, le second si $m > 1$, & le troisieme si $m < 1$; de sorte que tous les cas peuvent être compris dans le coëfficient général m.

13. Or, ayant fixé le principe de la propagation qui dépend des mariages & de la fécondité, il est évident que le nombre des enfans qui naissent pendant le cours d'une année, doit tenir un certain rapport au nombre de tous les hommes vivans. D'où il s'ensuit, que si le nombre des vivans demeure toujours le même, il naitra tous les ans le même nombre d'enfans: & si le nombre des vivans croît ou décroît, le nombre des naissances doit croitre ou décroître dans la même raison. Donc, en comparant ensemble le nombre de tous les naissans

 pendant

pendant plusieurs années consécutives, selon que ce nombre demeure le même, ou qu'il augmente ou diminue, on en pourra conclure si le nombre de tous les hommes demeure le même, ou s'il va en croissant ou en décroissant. En y joignant le principe de mortalité il est aussi clair, que le nombre des mourans pendant un an doit tenir un certain rapport tant à celui de tous les vivans qu'à celui des naissans.

14. Puisque ces deux principes de la mortalité & de la propagation sont indépendans l'un de l'autre, & que j'ai considéré le premier indépendamment de l'autre, on peut aussi représenter celui-ci, sans que le premier y soit mêlé. Car, supposant le nombre de tous les vivans à la fois $= M$, le nombre des enfans qui en sont produits dans l'espace d'un an pourra être posé $= \alpha M$, de sorte que α est la mesure de la propagation ou de la fécondité. Mais il est difficile de tirer de cette position les conséquences qui regardent la multiplication & les autres phénomenes qui en dépendent. Le raisonnement deviendra plus clair, si nous introduisons d'abord dans le calcul le nombre des enfans, qui naissent tous les ans, auquel si nous joignons l'hypothese de la mortalité, nous en pourrons conclure la valeur de α. Donc réciproquement le nombre des naissances dépend à la fois des deux hypotheses de la mortalité & de la fécondité; & de là on tirera ensuite sans difficulté la solution de toutes les autres questions qu'on propose ordinairement en traitant cette matiere.

15. Comme je suppose que la regle de la mortalité demeure toujours la même, je supposerai une semblable constance dans la fécondité; de sorte que le nombre des enfans qui naissent tous les ans, soit toujours proportionel au nombre de tous les vivans. Donc, si le nombre de tous les vivans demeure le même, on aura aussi tous les ans le même nombre de naissances: & si le nombre de tous les vivans va en augmentant ou en diminuant, le nombre des naissances annuelles croîtra ou décroîtra dans la même raison. Soit donc N le nombre des enfans nés pendant le cours d'une année, & nN celui des enfans nés l'année suivante: & puisque la raison qui a changé le nombre

bre

bre N ou nN subsiste encore, il faut que d'une année quelconque à la suivante le nombre des naissances croisse dans la raison de 1 à n. Par conséquent la troisieme année il naitra $n^2 N$, la quatrieme $n^3 N$, la cinquieme $n^4 N$, & ainsi de suite, ou bien les nombres des naissances annuelles constitueront une progression géométrique, ou croissante ou décroissante, ou d'égalité, selon que $n > 1$, ou $n < 1$, ou $n = 1$.

16. Posons donc que, dans une ville ou province, le nombre des enfans nés dans cette année soit $= N$, & de ceux qui naitront l'année prochaine $= nN$, & ainsi de suite selon cette progression

	le nombre des naissances
à présent	N,
après un an	nN,
après deux ans	$n^2 N$,
après 3 ans	$n^3 N$,
après 4 ans	$n^4 N$,
&c.	

& si nous supposons qu'après 100 ans aucun des hommes qui existent à présent, ne soit plus en vie, il n'y aura point après 100 ans d'autres vivans, que ceux qui resteront encore en vie de ces naissances. Donc, joignant l'hypothese de la mortalité, on pourra déterminer le nombre de tous les hommes qui vivront après 100 ans. Or, puisqu'il naitra cette année $n^{100} N$, on aura le rapport des naissances au nombre de tous les vivans.

17. Pour rendre cela plus clair, voyons combien d'hommes seront encore en vie après cent ans des naissances de toutes les années précédentes.

	Nombre des naissances	Après 100 ans il en vivra encore
à présent	N	$(100)\ N$
après 1 an	nN	$(99)\ nN$
après 2 ans	$n^2 N$	$(98)\ n^2 N$
après 3 ans	$n^3 N$	$(97)\ n^3 N$
. . . .		
après 98 ans	$n^{98} N$	$(2)\ n^{98} N$
après 99 ans	$n^{99} N$	$(1)\ n^{99} N$
après 100 ans	$n^{100} N$	$n^{100} N$

Donc le nombre de tous les vivans après 100 ans sera =

$$n^{100} N \left(1 + \frac{(1)}{n} + \frac{(2)}{n^2} + \frac{(3)}{n^3} + \frac{(4)}{n^4} + \frac{(5)}{n^5} + \&c.\right)$$

18. Les termes de cette série évanouiront enfin en vertu de l'hypothese de mortalité, & puisque le nombre de tous les vivans a un certain rapport au nombre des naissances pendant le cours d'une année, la multiplication d'une année à l'autre, qui vient d'être supposée comme 1 à n, nous découvre ce rapport. Car, si le nombre de tous les vivans est $= M$, & le nombre des enfans qui en sont procréés pendant le cours d'une année est posé $= N$, nous aurons

$$M = 1 + \frac{(1)}{n} + \frac{(2)}{n^2} + \frac{(3)}{n^3} + \frac{(4)}{n^4} + \frac{(5)}{n^5} + \&c.$$

Donc, si nous connoissons le rapport $\frac{M}{N}$, & que nous y joignons, l'hypothese de mortalité, ou les valeurs des fractions (1), (2), (3), (4), &c, cette équation détermine réciproquement la raison de la multiplication $1 = n$ d'une année à l'autre. Cependant on voit bien, que cette déter-

détermination ne fauroit être développée en général: mais, pour chaque hypothefe de mortalité, fi l'on calcule le rapport $\frac{M}{N}$ pour plufieurs valeurs de n, & qu'on en dreffe une table, il fera aifé d'affigner réciproquement pour chaque rapport donné M: N, qui exprime la fécondité, l'augmentation annuelle de tous les vivans, qui eft la même que celle des naiffances.

19. Suppofons donc que l'hypothefe de mortalité, ou les fractions (1), (2), (3), (4), (5), &c. foient connues, de même que l'hypothefe de fécondité, ou le rapport de tous les vivans M au nombre de enfans N qui en font procréés pendant un an, on en reconnoîtra fi le nombre des hommes demeure invariable, ou s'il va en augmentant ou en diminuant. Car, fi nous pofons le nombre de tous les vivans l'année prochaine $= nM$, celui des vivans à préfent étant $= M$, il faut tirer la valeur de n de l'équation trouvée

$$\frac{M}{N} = 1 + \frac{(1)}{n} + \frac{(2)}{n^2} + \frac{(3)}{n^3} + \frac{(4)}{n^4} + \frac{(5)}{n^5} + \&c.$$

& fuppofant connue la réfolution de cette équation, il eft indifférent fi l'on connoit la fécondité $\frac{M}{N}$, ou la multiplication $1 : n$, l'une étant déterminée par l'autre, moyennant l'hypothefe de la mortalité.

I QUESTION.

20. *Les hypothefes de mortalité & fécondité étant données, fi l'on connoit le nombre de tous les vivans, trouver combien il y en aura de chaque âge.*

Soit M le nombre de tous les vivans, & N le nombre des enfans qui en font procréés dans un an, & par l'hypothefe de mortalité on connoîtra la raifon de la multiplication annuelle $1 : n$. Or, connoiffant la valeur de n, il eft aifé de conclure du §. 17. qu'il y aura parmi le nombre M,

N enfans nouvellement nés,

$\frac{(1)}{n}N$ - - - - - âgés d'un an,

$\frac{(2)}{n^2}N$ - - - - - âgés de deux ans,

$\frac{(3)}{n^3}N$ - - - - - âgés de 3 ans,

$\frac{(4)}{n^4}N$ - - - - - âgés de 4 ans,

& en général

$\frac{(a)}{n^a}N$ - - - - - âgés de a ans.

Or la ſomme de tous ces nombres pris enſemble eſt $= M$.

II QUESTION.

21. *Les mêmes choſes étant données, trouver le nombre des hommes qui mourront dans un an.*

Soit M le nombre des hommes qui vivent à préſent, y compris les enfans qui ſont nés cette année, dont le nombre ſoit $= N$: & le quotient $\frac{M}{N}$ déterminera l'augmentation annuelle, qui ſoit $1:n$. Donc, l'année prochaine le nombre des vivans ſera $= nM$, parmi lequel ſe trouve le nombre des nouvellement nés $= nN$, les autres, dont le nombre eſt $nM - nN$ ſont ceux qui ſont encore en vie de l'année précédente, dont le nombre étoit $= M$; d'où il s'enſuit, qu'il en eſt mort $(1 - n)M + nN$. Donc, ſi le nombre des vivans eſt $= M$, il en meurt pendant le cours d'une année $(1 - n)M + nN$; tandis que dans ce même tems il naît N enfans.

III QUESTION.

22. *Connoissant tant le nombre des naissances que des enterremens qui arrivent pendant le cours d'une année, trouver le nombre de tous les vivans, & leur augmentation annuelle, pour une hypothese de mortalité donnée.*

Soit N le nombre des naissances, & O le nombre des enterremens, qui arrivent dans une année; ensuite, posons le nombre de tous les vivans $= M$, & l'augmentation annuelle $= 1 : n$; & la solution précédente nous fournit cette équation

$$O = (1 - n) M + n N,$$

Or l'hypothese de mortalité donne:

$$\frac{M}{N} = 1 + \frac{(1)}{n} + \frac{(2)}{n^2} + \frac{(3)}{n^3} + \frac{(4)}{n^4} + \&c.$$

Donc, ayant par la premiere $M = \frac{O - nN}{1 - n}$, cette valeur étant substituée dans l'autre équation, donne

$$\frac{O - N}{1 - n} = \frac{N - O}{n - 1} = \frac{(1)}{n} + \frac{(2)}{n^2} + \frac{(3)}{n^3} + \&c.$$

d'où il faut trouver la valeur du nombre n.

23. Si le nombre des enterremens O est égal à celui des naissances N, de sorte que $N = (1 - n) M + n N$, il faut absolument qu'il soit $n = 1$, ou que le nombre des vivans demeure toujours le même; & dans ce cas ce nombre sera

$$M = N (1 + (1) + (2) + (3) + (4) + \&c.)$$

Or, si le nombre des naissances N surpasse celui des enterremens O, de sorte que $N - O$ soit un nombre positif, l'équation

$$\frac{N - O}{n - 1} = \frac{(1)}{n} + \frac{(2)}{n^2} + \frac{(3)}{n^3} + \frac{(4)}{n^4} + \&c.$$

donnera pour n une valeur > 1, qui marque que le nombre des vivans va en croissant. Mais, si le nombre des naissances N est plus petit que celui des enterremens O, notre équation doit être représentée sous cette forme:

$$\frac{O - N}{1 - n} = \frac{(1)}{n} + \frac{(2)}{n^2} + \frac{(3)}{n^3} + \frac{(4)}{n^4} + \&c.$$

d'où l'on tire pour n une valeur plus petite que 1, qui marque que le nombre des vivans va en décroissant.

IV Question.

24. *Le nombre des naissances & des enterremens d'une année étant donné, trouver combien de chaque âge il y aura parmi les morts.*

Soit N le nombre des enfans nés pendant un an, & O le nombre des morts, & par la question précédente on aura le nombre de tous les vivans M, avec la multiplication $1 : n$, d'une année à l'autre. De là considérons combien d'hommes il y aura en vie de chaque âge, tant cette année que l'année prochaine.

Nombre	Cette année	l'année suivante
des nouvellement nés - - - - - -	N	nN
de l'âge d'un an - - - - - - -	$\frac{(1)}{n} N$	$(1) N$
de l'âge de deux ans - - - - -	$\frac{(2)}{n^2} N$	$\frac{(2)}{n} N$
de l'âge de trois ans - - - - -	$\frac{(3)}{n^3} N$	$\frac{(3)}{n^2} N$
&c.		&c.

D'où

D'où il est évident qu'il en est mort pendant le cours de cette année

le nombre des morts

au dessous d'un an . . . . . . $(1 - (1))\, N$,

de 1 an à deux ans . . . . $((1) - (2))\, \frac{N}{n}$,

de 2 ans à 3 ans . . . . . $((2) - (3))\, \frac{N}{n^2}$,

de 3 ans à 4 ans . . . . . $((3) - (4))\, \frac{N}{n^3}$,

de 4 ans à 5 ans . . . . . $((4) - (5))\, \frac{N}{n^4}$,

&c.

25. Le nombre de tous les morts de cette année étant $= O$, on aura cette équation

$$\frac{O}{N} = 1 - (1)\left(1 - \frac{1}{n}\right) - \frac{(2)}{n}\left(1 - \frac{1}{n}\right) - \frac{(3)}{n^2}\left(1 - \frac{1}{n}\right) - \&c.$$

qui convient avec celle-ci $O = (1 - n)M + nN$, à cause de

$$\frac{M}{N} = 1 + \frac{(1)}{n} + \frac{(2)}{n^2} + \frac{(3)}{n^3} + \frac{(4)}{n^4} + \frac{(5)}{n^5} + \&c.$$

Donc, connoissant l'hypothese de la mortalité avec la multiplication annuelle $1 : n$, & le nombre des naissances d'une année N, on peut déterminer combien d'hommes de chaque âge mourront probablement pendant le cours d'une année.

V QUESTION.

26. *Connoissant le nombre de tous les vivans, de même que le nombre des naissances, avec les nombres des morts de chaque âge pendant le cours d'une année, trouver la loi de la mortalité.*

 Soit

Soit M le nombre de tous les vivans, N celui des naissances, & O des enterremens pendant le cours d'une année; & de là on connoîtra d'abord la multiplication annuelle $n = \frac{M - O}{M - N}$: soit ensuite pour cette année

	le nombre des morts	par la précéd. question
au dessous d'un an - - - -	α	$= (1 - (1))\, N,$
de 1 an à 2 ans - - - - -	β	$= ((1) - (2))\, \frac{N}{n},$
de 2 ans à 3 ans - - - -	γ	$= ((2) - (3))\, \frac{N}{n^2},$
de 3 ans à 4 ans - - - - -	δ	$= ((3) - (4))\, \frac{N}{n^3},$

&c.

& de là on trouvera les fractions (1), (2), (3), &c. qui contiennent la loi de la mortalité,

$$(1) = 1 - \frac{\alpha}{N},$$

$$(2) = (1) - \frac{n\beta}{N} = 1 - \frac{\alpha - n\beta}{N},$$

$$(3) = (2) - \frac{n^2\gamma}{N} = 1 - \frac{\alpha - n\beta - n^2\gamma}{N},$$

$$(4) = (3) - \frac{n^3\delta}{N} = 1 - \frac{\alpha - n\beta - n^2\gamma - n^3\delta}{N},$$

&c.

27. Voilà

27. Voilà une maniere plus seure que celles des rentes viageres pour déterminer la loi de la mortalité: & cette détermination deviendra la plus aisée, si l'on choisit une ville ou province, où le nombre des enterremens égale celui des bâtemes, de sorte que $n = 1$; car alors il suffit de savoir le nombre des morts de chaque âge. Mais il faut bien remarquer qu'une telle loi de mortalité ne doit être étendue que sur la ville ou province, dont on l'a tirée. En d'autres pays pourroit avoir lieu une loi tout à fait différente; & on a observé en particulier, que dans les grandes villes, la mortalité est plus grande que dans les petites, & dans celles-ci plus grande qu'aux villages. Si l'on se donnoit la peine de bien établir, tant la loi de mortalité, que celle de la fécondité pour plusieurs endroits, on en pourroit tirer quantité de conclusions fort importantes.

28. Mais il faut encore remarquer, que, dans ce calcul que je viens de déveloper, j'ai supposé, que le nombre de tous les vivans d'un endroit demeure le même, ou qu'il croît ou décroît uniformement, de sorte qu'il en faut exclure tant des ravages extraordinaires, comme la peste, guerre, famine, que des accroissemens extraordinaires comme de nouvelles colonies. Il sera aussi bon de choisir un tel endroit, où tous les naissans demeurent dans le pays, & où des étrangers ne viennent pas pour y vivre & mourir, ce qui renverseroit les principes sur lesquels j'ai fondé les calculs précédens. Pour des endroits assujettis à de telles irrégularités, il y faudroit tenir des régistres exactes tant de tous les vivans que des morts, & alors, en suivant les principes que je viens d'établir, on seroit en état d'y appliquer le même calcul. Tout revient toujours à ces deux principes, celui de la mortalité & celui de la fécondité, qui, étant une fois bien établis pour un certain endroit, il ne sera pas difficile de résoudre toutes les questions qu'on peut proposer sur cette matiere, dont je me contente d'avoir rapporté les principales.

29. Je n'ai auſſi traité ces queſtions qu'en général ſans les borner à quelque endroit particulier: or, pour en tirer tous les avantages, tout dépend d'un grand nombre d'obſervations faites en pluſieurs endroits différens, tant du nombre de tous les vivans & des naiſſans pendant un ou pluſieurs ans, que du nombre des morts avec leurs âges. Comme c'eſt un article fort difficile à bien exécuter, nous devons être très redevables à Mr. Suſſmilch, Conſeiller du Conſiſtoire ſupérieur, qui, après avoir ſurmonté des obſtacles presque invincibles, nous a fourni un ſi grand nombre de telles obſervations, qui paroiſſent ſuffiſantes pour décider la plupart des queſtions qui ſe préſentent dans cette recherche. Et en effet, il en a déjà tiré lui même tant de concluſions importantes, que nous pouvons eſpérer qu'il portera par ſes ſoins cette ſcience au plus haut degré de perfection dont elle eſt ſuſceptible.

SUR LES RENTES VIAGERES,

PAR M. EULER.

I.

Ayant établi le véritable principe ſur lequel il faut fonder le calcul des rentes viageres, je crois que le dévelopement de ce calcul ne manquera pas d'être fort intéreſſant, tant pour ceux qui voudront entreprendre un tel établiſſement que pour ceux qui en voudront profiter. J'ai ebauché cette matiere dans mes Recherches générales ſur la mortalité & la multiplication du genre humain, où j'ai expoſé la juſte méthode de déterminer par le calcul, combien un homme d'un certain âge doit payer, pour jouir pendant toute ſa vie d'une rente annuelle donnée. Mais, puisque le calcul me paroiſſoit alors fort embarraſſant, je ne pouvois pas me réſoudre à l'exécuter. Or une certaine occaſion m'obligea dernierement d'entreprendre ce travail, dont, moyennant quelques artifices pour abréger le calcul, je ſuis heureuſement venu à bout.

2. Il y a deux choſes, ſur lesquelles la détermination des rentes viageres doit être fondée: l'une eſt une bonne liſte de mortalité, qui nous montre, pour chaque âge, combien il en mourra probablement pendant le cours d'une ou pluſieurs années: l'autre eſt la maniere dont l'entrepreneur peut faire valoir l'argent qu'il aura reçu des rentiers: ou à quels intérêts il eſt en état de le placer. Ces deux articles concourent très eſſentiellement à déterminer les rentes auxquelles l'entrepreneur pourra s'engager, tant par rapport à la ſomme qui lui a été payée d'abord, que par rapport à l'âge du rentier. Car il eſt évident, que plus l'entrepreneur peut retirer de profit du capital,

pital qu'il a entre ses mains, plus il sera aussi en état de payer de fortes rentes.

3. Pour la liste de mortalité, l'entrepreneur risqueroit sans doute beaucoup, s'il vouloit se régler sur la mortalité des hommes en général, qu'on conclut des observations faites dans une grande ville, ou dans un pays tout entier, où l'on tient également compte de tous les hommes tant vigoureux qu'infirmes. Or, quand il s'agit de se procurer des rentes viageres, il est très naturel qu'il en faut exclure tous ceux dont la constitution ne semble pas promettre une longue vie, ainsi on a raison de regarder les rentiers comme une espece plus robuste. C'est aussi dans cette vue que j'ai choisi dans mon Mémoire allegué la liste de M. Kersseboom, qu'il a tirée des observations faites uniquement sur des personnes qui ont joui de rentes viageres: & partant aussi cette même liste me servira de fondement dans les calculs suivans.

4. Si l'entrepreneur n'étoit pas en état de placer assez bien le capital qui lui est payé par les rentiers, il ne sauroit accorder que des rentes si médiocres, que personne ne voudroit les acquérir. Autrefois la ville d'Amsterdam a payé dix pour cent de rentes à toutes les personnes au dessous de vingt ans, ou bien pour 1000 florins il leur ont payé 100 par an; ce qui est une rente si riche que la ville en auroit souffert une perte très considérable si elle n'avoit gagné presque 10 pour cent par an du fonds que cette entreprise lui avoit procuré. Ainsi, si l'on ne peut compter que sur 5 pour cent d'intérêts, les rentes doivent devenir beaucoup moins considérables; cependant c'est là dessus qu'il semble qu'il faut à présent régler les rentes viageres, attendu que ceux qui auront occasion d'en faire un plus grand profit, ne se mêleront gueres d'une telle entreprise, qui ne sauroit s'achever qu'après un grand nombre d'années.

5. Pour déterminer le prix de ces rentes, on fixe pour chaque âge un terme moyen de vie, qu'il est aussi probable de survivre que de mourir avant que de l'avoir atteint; ou bien ce terme

terme eſt pris tel, que d'un grand nombre d'hommes du même âge il en meurt autant avant ce terme qu'après. Alors on ſuppoſe que tous les hommes de cet âge atteignent préciſément ce terme, & qu'ils meurent enſuite tous à la fois; là deſſus on croit pouvoir fixer ſurement le prix des rentes, puiſqu'il s'agit de trouver la valeur préſente d'une rente annuelle, payable pendant un certain nombre d'années conſécutives: & l'on eſtime que le profit que l'entrepreneur retire du côté de ceux qui meurent avant ledit terme, eſt préciſément récompenſé par la perte que lui cauſent ceux des rentiers qui ſurvivent à ce terme. Mais on comprendra aiſément que ce raiſonnement cloche, puiſqu'on ne tient pas compte de la diminution du prix préſent d'une rente qui ne ſera payée qu'après pluſieurs années. A cauſe de cette circonſtance, il ſera néceſſaire de fonder le calcul ſur ſes véritables principes, comme je l'ai enſeigné dans mon Mémoire mentionné, ſans ſe ſervir d'aucun raiſonnement qui pourroit paroitre ſuſpect.

6. Pour cet effet, conſidérons le nombre de 1000 enfans nés à la fois, & que ces caracteres (1), (2), (3), (4), &c. marquent les nombres de ceux qui vivront encore au bout de 1, 2, 3, 4, &c. ans, de ſorte qu'en général (m) repréſente le nombre de ceux, qui atteindront l'âge de m ans. Soit maintenant r la rente annuelle qu'un homme âgé de m ans voudroit acquérir, & x le prix qu'il en doit payer à préſent à l'entrepreneur; lequel doit être un juſte équivalent de la dépenſe dont l'entrepreneur ſe charge par cette convention. Pour déterminer ce prix x, il faut conſidérer pluſieurs hommes du même âge de m ans, & qui entrent dans la même condition. Soit (m) le nombre de ces hommes, & la ſomme qu'ils payeront à préſent à l'entrepreneur ſera $= (m)\,x$, qui doit être ſuffiſante pour fournir toutes les rentes, qu'il aura à payer dans la ſuite.

7. Or de ces (m) hommes il y en aura en vie après un an $(m+1)$, après deux ans $(m+2)$, après trois ans $(m+3)$, &

& ainsi de suite: donc l'entrepreneur aura à payer après un an $(m+1)r$, après deux ans $(m+2)r$, après trois ans $(m+3)r$, &c. jusqu'à ce que tous ces rentiers seront éteints. On n'a donc qu'à réduire chacun de ces payemens au tems présent à raison de 5 pour cent, & en égaler la somme à $(m)x$ pour en conclure la juste valeur de x. Or, pour rendre le calcul plus général, au lieu de $\frac{105}{100}$ ou $\frac{21}{20}$ écrivons la lettre λ, & la somme de toutes les rentes que l'entrepreneur doit payer successivement vaudra à présent,

$$\frac{(m+1)r}{\lambda} + \frac{(m+2)r}{\lambda^2} + \frac{(m+3)r}{\lambda^3} + \frac{(m+4)r}{\lambda^4} + \&c.$$

laquelle étant égale à $(m)x$ donnera

$$x = \frac{r}{(m)}\left(\frac{(m+1)}{\lambda} + \frac{(m+2)}{\lambda^2} + \frac{(m+3)}{\lambda^3} + \frac{(m+4)}{\lambda^4} + \&c.\right)$$

8. Voilà donc le juste prix qu'un homme âgé de m ans doit payer pour être mis dans la jouissance d'une rente annuelle r pendant toute sa vie, & laquelle étant d'abord placée à 5 pour cent met l'entrepreneur précisément en état de payer dans la suite les rentes, pourvu que le nombre des rentiers soit assez considérable. On comprend bien, qu'ayant ainsi placé d'abord tout le capital que l'entrepreneur aura reçu, l'année suivante les intérêts ne seront pas suffisans à payer les rentes, mais qu'il y faudra employer une partie du capital, d'où le capital souffrira tous les ans une diminution: cependant il ne sera entierement éteint que lorsque tous les rentiers seront morts. Par cette raison, l'entrepreneur sera bien obligé de hausser le prix des rentes que je viens de trouver, selon les circonstances & les dépenses particulieres qu'un tel établissement exige.

9. On voit bien que la détermination de ce prix nommé x demande un calcul aussi long qu'ennuyant, surtout pour les bas âges, où le nombre des termes à ajoûter ensemble est fort considérable.

dérable. Mais il n'eſt pas difficile de s'appercevoir, qu'ayant déjà fait ce calcul pour un certain âge, on en pourra aiſément tirer celui qui repond à une année de plus où moins. Pour expliquer plus clairement cet artifice, je me ſervirai de ce caractere $\overline{m}\, r$ pour marquer le prix qu'un homme âgé de m ans doit payer pour la rente viagere r: de ſorte que

$$\overline{m} = \frac{1}{(m)}\left(\frac{(m+1)}{\lambda} + \frac{(m+2)}{\lambda^2} + \frac{(m+3)}{\lambda^3} + \frac{(m+4)}{\lambda^4} + \&c.\right)$$

de là, pour les hommes âgés de $m + 1$ ans, nous aurons

$$\overline{m+1} = \frac{1}{(m+1)}\left(\frac{(m+2)}{\lambda} + \frac{(m+3)}{\lambda^2} + \frac{(m+4)}{\lambda^3} + \frac{(m+5)}{\lambda^4} + \&c.\right)$$

d'où nous concluons:

$$\lambda\,(m)\,\overline{m} = (m+1) + (m+1)\,\overline{m+1},$$

& partant

$$\overline{m} = \frac{1}{\lambda}\cdot\frac{(m+1)}{(m)}\,(1 + \overline{m+1}),$$

de ſorte qu'ayant trouvé la valeur de $\overline{m+1}$, on en calculera aſſez aiſément celle de $\overline{m}$.

10. A l'aide de cet artifice, après avoir commencé par l'âge de 90 ans, j'ai calculé le prix de la rente r ſucceſſivement pour tous les âges inférieurs jusqu'aux enfans nouvellement nés; d'où j'ai obtenu la table ſuivante, en fixant la rente r à 100 écus, & les intérêts à 5 pour cent.

TABLE

qui marque les prix d'une rente viagere de 100 *écus pour tous les âges.*

âge années	nombre des vivans	prix de la rente	âge années	nombre des vivans	prix de la rente
0	1000	1155, 50	25	552	1403, 60
1	804	1409, 04	26	544	1395, 45
2	768	1448, 84	27	535	1389, 87
3	736	1487, 43	28	525	1387, 16
4	709	1521, 27	29	516	1382, 54
5	690	1541, 32	30	507	1376, 82
6	676	1551, 90	31	499	1368, 84
7	664	1558, 94	32	490	1363, 68
8	654	1561, 92	33	482	1355, 63
9	646	1560, 33	34	475	1344, 38
10	639	1556, 29	35	468	1332, 71
11	633	1549, 59	36	461	1320, 60
12	627	1542, 64	37	454	1308, 01
13	621	1535, 42	38	446	1298, 04
14	616	1525, 28	39	439	1284, 67
15	611	1514, 65	40	432	1270, 76
16	606	1503, 50	41	426	1253, 09
17	601	1491, 81	42	420	1234, 54
18	596	1479, 54	43	413	1218, 24
19	590	1469, 31	44	406	1201, 21
20	584	1458, 63	45	400	1180, 19
21	577	1450, 18	46	393	1161, 27
22	571	1438, 68	47	386	1141, 44
23	565	1426, 66	48	378	1123, 88
24	559	1414, 07	49	370	1105, 59
25	552	1403, 60	50	362	1086, 52
m	(m)	m	m	(m)	m

âge

âge années	nombre des vivans	prix de la rente	âge années	nombre des vivans	prix de la rente
50	362	1086, 52	70	175	638, 30
51	354	1066, 62	71	165	610, 83
52	345	1049, 17	72	155	582, 75
53	336	1031, 14	73	145	554, 09
54	327	1012, 49	74	135	524, 89
55	319	989, 78	75	125	495, 22
56	310	969, 44	76	114	470, 16
57	301	948, 35	77	104	441, 13
58	291	929, 98	78	93	417, 98
59	282	907, 64	79	82	397, 75
60	273	884, 44	80	72	375, 64
61	264	860, 32	81	63	350, 77
62	254	838, 90	82	54	329, 69
63	245	813, 21	83	46	306, 38
64	235	790, 20	84	39	279, 44
65	225	766, 19	85	32	257, 60
66	215	742, 30	86	26	232, 90
67	205	717, 43	87	20	217, 91
68	195	691, 93	88	15	205, 07
69	185	665, 14	89	11	193, 62
70	175	638, 30	90	8	179, 54
m	(*m*)	*m*	*m*	(*m*)	*m*

11. M. Kerſeboom n'a continué ſa Table ſur la mortalité que jusqu'à 95 ans, & par cette raiſon je n'ai pas jugé convenable de continuer celle-ci au de là de 90 ans, puisque perſonne à cet âge n'aura probablement plus de vues pour les rentes viageres. Du moins, presque dans tous les plans, ces vieillards ſe trouvent rangés à la même claſſe que ceux de 60 ou de 70 ans: nonobſtant qu'il ſeroit fort injuſte, ſi l'on vouloit exiger d'un nonagénaire plus que le tiers

du prix que doit payer un ſeptuagénaire, & plus que le quart d'un ſexagénaire. Cependant, ſi l'on eſt curieux de voir la continuation de ma table, la voici:

m	90	91	92	93	94
(*m*)	8	6	4	3	2
m	179, 54	151, 35	138, 38	93, 73	47, 62

Mais je ne voudrois pas conſeiller à un entrepreneur de ſe mêler avec de tels vieillards, à moins que leur nombre ne fut aſſez conſidérable; ce qui eſt une regle générale pour tous les établiſſemens fondés ſur les probabilités.

12. De là on conclura aiſément combien l'entrepreneur devroit payer d'intérêt à chaque âge, pour une ſomme quelconque, qu'on auroit miſe d'abord entre ſes mains. Il n'eſt pas néceſſaire d'entrer ici dans le même détail, & il ſuffira de marquer de 5 en 5 ans les *procents*, que les rentiers pourroient exiger.

âge	Procents	âge	Procents	âge	Procents
0	$8\frac{2}{3}$	30	$7\frac{1}{4}$	60	$11\frac{1}{3}$
5	$6\frac{1}{2}$	35	$7\frac{1}{2}$	65	13
10	$6\frac{1}{3}$	40	8	70	$15\frac{2}{3}$
15	$6\frac{1}{2}$	45	$8\frac{1}{2}$	75	20
20	$6\frac{3}{4}$	50	9	80	$25\frac{2}{3}$
25	7	55	10	85	$38\frac{1}{2}$
30	$7\frac{1}{4}$	60	$11\frac{1}{3}$	90	$55\frac{1}{2}$

Sur ce pied l'entrepreneur n'auroit aucun profit, à moins qu'il ne fut en état de faire valoir ſon argent à plus que de 5 pour cent.

13. Donc, ſi un état avoit beſoin d'argent, & qu'il en pût trouver à 5 pour cent d'intérêts autant qu'il lui en faut, il feroit aſſurément fort mal, s'il vouloit établir de telles rentes viageres, que je viens de déterminer ſur ce même pied de 5 pour cent, puiſqu'eu égard à l'embarras qu'un tel établiſſement exige néceſſairement, il feroit toujours

jours mieux d'emprunter la somme dont il a besoin à 5 pour cent, qu'il pourroit ensuite acquitter selon les circonstances, au lieu que les rentes viageres lui resteroient à charge pendant très longtems. Ou bien, il faudroit hausser le prix des rentes au delà de ce que je les ai fixées, pour lui procurer quelque bénéfice; mais alors il seroit fort à craindre qu'il ne se trouvât plus de rentiers, à moins que ce ne fussent des vieillards au delà de 60 ans, que les intérêts de 10 & plus pour cent pourroient éblouir.

14. Mais vouloir établir des rentes viageres plus avantageuses pour les rentiers, ce seroit un projet peu propre à soulager un Etat; puisque cela reviendroit au même, que si l'on vouloit se charger de dettes à six & davantage pour cent: pendant qu'on pourroit faire des emprunts à 5 pour cent sans s'assujettir à l'embarras que des rentes viageres demandent. En effet, si un Etat vouloit établir les rentes exposées ici, & calculées sur le pied de 5 pour cent, il ne sauroit regarder cette charge que comme un emprunt pris à 6 pour 100, à cause de tant d'arrangemens qui y seroient requis. Ainsi je ne vois presque plus de cas, où l'établissement des rentes viageres pourroit être avantageux à un Etat, tant qu'on peut emprunter de l'argent à 5 pour cent, & peut-être moins. Mais on peut imaginer une autre espece de rentes, qui seroit peut-être plus goûtée, quoi qu'elle soit également fondée sur le pied de 5 pour cent. Je veux parler de rentes, qui ne doivent commencer à courir qu'après 10 ou même 20 ans; & on comprend aisément, que le prix de telles rentes sera fort médiocre, & partant capable d'attirer le public.

15. Concevons donc cette question aussi en général, & cherchons combien un homme âgé de m ans doit payer à présent, pour s'acquérir une rente annuelle r, qui ne commencera à lui être payée qu'après n ans, de sorte que depuis ce tems il en puisse jouir régulierement jusqu'à sa mort. Soit x le prix présent de cette rente, & nous trouverons comme ci-dessus:

$$x = \frac{r}{(m)}\left(\frac{(m+n)}{\lambda^n} + \frac{(m+n+1)}{\lambda^{n+1}} + \frac{(m+n+2)}{\lambda^{n+2}} + \&c.\right)$$

 Or

Or, par le calcul des rentes ordinaires expliqué auparavant, nous aurons:

$$\overline{m+n-1} = \frac{1}{(m+n-1)}\left(\frac{(m+n)}{\lambda} + \frac{(m+n+1)}{\lambda^2} + \frac{(m+n+2)}{\lambda^3} + \&c.\right)$$

d'où nous concluons:

$$x = \frac{r}{(m)} \cdot \frac{(m+n-1)}{\lambda^{n-1}} \cdot \overline{m+n-1} = \frac{r}{\lambda^{n-1}} \cdot \frac{(m+n-1)}{(m)} \cdot \overline{m+n-1},$$

où $\overline{m+n-1}\; r$ exprime le prix préſent de la rente ordinaire pour un homme âgé de $m+n-1$ ans.

16. Donc, ſi l'on demande le prix préſent d'une rente annuelle de 100 écus, qui ne commencera à être payée qu'au bout de 10 ans pour un homme âgé de m ans, on prendra de la table dévelopée au §. 10. le prix de la rente ordinaire qui convient à l'âge de $m+9$ ans, & on le multipliera par $\left(\frac{20}{21}\right)^9 \frac{(m+9)}{(m)}$ pour avoir la valeur cherchée de x. De là j'ai calculé les tables ſuivantes de 5 en 5 ans:

Table

des prix d'une rente viagere de 100 écus qui ne doit doit commencer à courir qu'au bout de 10 ans.

âge ans	prix de la rente	âge ans	prix de la rente	âge ans	prix de la rente
0	649,75	30	717,05	60	290,55
5	877,77	35	671,73	65	203,11
10	874,50	40	610,40	70	120,14
15	833,95	45	533,55	75	56,20
20	787,43	50	455,78	80	19,07
25	745,72	55	375,25		
30	717,05	60	290,55		

Table

TABLE

des prix d'une rente viagere de 100 *écus qui ne doit commencer à courir qu'au bout de* 20 *ans.*

âge ans	Prix de la rente	âge ans	Prix de la rente	âge ans	Prix de la rente
0	343,06	30	319,30	60	47,28
5	453,36	35	272,96	65	19,17
10	441,81	40	234,47	70	4,82
15	413,60	45	183,72		
20	382,17	50	134,52		
25	349,63	55	87,91		
30	319,30	60	47,28		

17. Peut-être qu'un tel projet de rentes viageres réussiroit mieux, nonobstant qu'elles sont fixées sur le pied de 5 pour cent. Il semble qu'il seroit toujours avantageux pour un enfant nouvellement né de lui pouvoir assurer, moyennant le prix de 343, ou bien de 350 écus, une rente fixe de 100 écus par an, quoiqu'elle ne commence à être payée que lorsque l'enfant aura atteint l'âge de 20 ans: & si l'on y vouloit employer la somme de 3500 écus, ce seroit toujours un bel établissement, que de jouir dès l'âge de 20 ans d'une pension fixe de 1000 écus. Cependant il est encore douteux, s'il se trouveroit plusieurs parens qui voudroient bien faire un tel sacrifice pour le bien de leurs enfans. Peut-être se trouveroit il plus d'hommes de 60 ans, qui ne balanceroient point de payer d'abord 3000 écus pour être assurés de jouir d'une pension fixe de 1000 écus par an dès qu'ils auroient passé leur 70me année.

DU

MOUVEMENT

D'UN CORPS SOLIDE QUELCONQUE LORSQU'IL TOURNE AUTOUR D'UN AXE MOBILE.

PAR M. EULER.

Quelque mouvement que puiſſe avoir un corps ſolide, dont les parties conſervent toujours entr'elles les mêmes diſtances, on ſait qu'il eſt permis de l'enviſager comme composé de deux ſortes de mouvement. Premierement, on conſidere uniquement ſon centre de gravité, comme ſi toute la matiere y étoit réunie, & on examine le mouvement, qui convient à ce point, qu'on nomme le mouvement progreſſif du corps; de ſorte que, ſi le centre de gravité ne change point de place, on dit que le corps n'a aucun mouvement progreſſif, quel que ſoit d'ailleurs le mouvement des autres parties du corps. Enſuite, ayant connu le mouvement du centre de gravité du corps, on conſidere ſi tous les autres points du corps ſont portés par un mouvement ſemblable, de ſorte qu'à chaque inſtant tous les points ſe meuvent ſelon la même direction & avec la même viteſſe que le centre de gravité; ou ſi leur mouvement eſt différent de celui du centre de gravité. Dans le premier cas, on juge que le corps n'a d'autre mouvement que le progreſſif, ou celui dont le centre de gravité eſt porté: or, dans l'autre cas, on voit qu'il ſe trouve dans le corps, outre le mouvement progreſſif, encore un autre mouvement particulier qu'on nomme mouvement de rotation. Pour mieux connoitre cette différence, on n'a qu'à ſe figurer que l'eſpace dans lequel le corps ſe meut, eſt porté dans un ſens contraire avec une viteſſe égale à celle du centre de gravité du corps. Par ce moyen, le centre de gravité ſera réduit

duit en repos; & si le corps n'eût point auparavant d'autre mouvement que le progressif; il se trouvera à présent dans un repos parfait. Mais, si le mouvement progressif a été accompagné d'un mouvement de rotation, ce dernier ne sera pas détruit par le transport mentionné de l'espace; mais chaque partie conservera encore à l'égard du centre de gravité le même mouvement rélatif qu'elle avoit auparavant. Cette idée nous conduit à une connoissance du mouvement de rotation qui est indépendant de l'autre mouvement progressif; & c'est ainsi qu'on peut se représenter séparément l'un & l'autre de ces deux mouvemens. Pour connoitre le mouvement progressif, on ne considérera que le centre de gravité tout comme si toute la matiere du corps y étoit réunie; & pour connoitre le mouvement de rotation, on ne regardera plus le mouvement progressif, mais on considérera le centre de gravité comme s'il étoit en repos.

Quoique cette séparation ne se fasse que dans nos pensées, elle est pourtant conforme aux principes de la Mécanique; en vertu desquels il est certain que le mouvement progressif d'un corps quelconque, qui n'est sollicité par aucune force, doit demeurer toujours le même; ou bien le centre de gravité conservera toujours la même vitesse suivant la même direction, conformément au principe de l'inertie, tout comme si toute la masse du corps étoit rassemblée dans le centre de gravité. Et de plus, s'il y a des forces qui agissent sur le corps, le mouvement progressif en sera également altéré, que si toute la matiere du corps étoit actuellement réunie dans le centre de gravité, & que toutes les forces fussent appliquées à ce point, chacune suivant sa direction: de sorte que la détermination du mouvement progressif n'est plus assujettie à aucune difficulté, vu qu'elle suit les mêmes regles, soit que le corps ait outre cela quelque mouvement de rotation ou non.

Il en est de même du mouvement de rotation, qui étant indépendant du mouvement progressif, suit toujours les mêmes regles, comme si le centre de gravité se trouvoit actuellement en repos. Par con-

conséquent, quelque compliqué que soit le mouvement d'un corps, & de quelques forces qu'il soit sollicité, on parviendra à la connoissance de ce mouvement par les deux opérations suivantes.

D'abord on fera abstraction du mouvement de rotation, & on considérera le corps comme si toute sa masse étoit réunie dans le centre de gravité, où l'on rapporte aussi toutes les forces dont le corps est sollicité, chacune suivant sa direction; & alors les principes connus de Mécanique montreront le vrai mouvement progressif du corps.

Ensuite on fera abstraction du mouvement progressif, & on considérera le corps tout comme si son centre de gravité étoit en repos, ou qu'il y fut arrêté par une force quelconque. Il s'agit donc alors de déterminer le mouvement de rotation que le corps aura autour de son centre de gravité, tant par rapport à son mouvement imprimé que par rapport aux forces dont il est sollicité. Après qu'on aura déterminé chacun de ces deux mouvemens à part, en les combinant ensemble, on aura le mouvement tout entier du corps en question.

Or, quelque aisée que soit la premiere de ces deux recherches, qui regarde le mouvement progressif, l'autre qui roule sur le mouvement de rotation, est d'autant plus difficile: & si l'on excepte quelques cas assez simples en eux-mêmes, on peut dire que les regles qu'on doit suivre dans cette recherche, sont encore presque entierement inconnues. Car, quoique j'aye déjà dévelopé dans une Piece, qui porte le titre: *Découverte d'un nouveau principe de Mécanique*, les formules, qui peuvent conduire à ce but, l'application en est pourtant souvent extrèmement difficile; & pour surmonter ces difficultés, il semble que le plus sur moyen sera d'entreprendre la même recherche en plusieurs manieres différentes, & de représenter les regles que j'ai déjà trouvées sous d'autres formes, afin de nous les rendre plus familieres, & d'en connoitre mieux la force. Car on sait par l'expérience, que lorsqu'une recherche est fort épineuse, les premiers efforts nous en éclaircissent ordinairement fort peu; & ce n'est que par des efforts réiterés, & en envisageant la même chose sous plusieurs points de vuë, qu'on parvient à une connoissance accomplie.

Je

Je m'en vai donc faire de seconds efforts pour rechercher la théorie du mouvement de rotation des corps solides, qui ne manqueront pas de nous fournir de plus grands éclaircissemens sur cette matiere, qui paroit encore si obscure. Or je remarque d'abord que la plus grande partie de cette obscurité tire son origine de la maniere de se bien représenter le mouvement dont un corps tourne sur son centre de gravité: & partant je tâcherai de donner une méthode, par laquelle on puisse se former une idée distincte d'un tel mouvement, quel qu'il soit: & ensuite je déterminerai les forces qui sont requises pour l'entretien de ce mouvement. Ce sera le sujet des propositions suivantes.

PROPOSITION I.

I. *Si un corps tourne d'un mouvement quelconque sur son centre de gravité, on demande de quelle maniere on peut le mieux représenter ce mouvement, & s'en former une juste idée.*

SOLUTION.

Soit *klm* le corps dont il faut représenter le mouvement, qu'il peut avoir autour de son centre de gravité O, que je suppose demeurer toujours en repos. Qu'on marque sur ce corps un point *m*, par lequel & le centre de gravité O on fasse passer la droite indéfinie MOK, que je nommerai l'axe du corps. Soit outre cela MLK un plan, qui coupe le corps par l'axe MK, & qui marque en sa surface la ligne *mlk*. C'est pour avoir des marques distinguées sur le corps, par la position desquelles on puisse juger à chaque moment du mouvement du corps. Ainsi, si le corps en question étoit la Terre, la ligne MK seroit l'axe de la Terre, le point *m* & *k* ses Poles, & le plan MLK le premier Méridien; or, pour tout autre corps, j'employerai ces mêmes dénominations, quel que soit leur mouvement. Ayant donc fixé sur le corps ces marques, savoir l'axe MK & le Méridien MLK, je rapporte le corps à l'espace infini, de sorte que le centre de gravité y occupe le centre O, autour duquel je conçois, comme dans le Ciel,

Planche V. Fig. 1.

Fig. 2.

 ou

ou sur la surface du globe celeste, premierement l'horizon ADB, auquel repond le zénith C, & ensuite un cercle vertical CA, par rapport auxquels je considérerai à chaque tems la situation du corps: car, ayant déterminé pour chaque instant la position tant de l'axe du corps que de son méridien à l'égard de l'horizon ADB, & du cercle vertical fixe CA, on connoitra parfaitement le mouvement du corps.

Soit donc, après un tems écoulé quelconque $= t$, l'axe du corps en OM, & son méridien dans le plan OML, de sorte que M sera sur la surface de la sphere celeste, & ML un grand cercle. Qu'on tire par le point M le cercle vertical CMP, & qu'on nomme

l'angle ACM ou l'arc AP $= p$,

la distance du point M au zénith C ou l'arc CM $= q$,

& l'angle CML $= r$,

& il est évident, que sachant pour chaque tems proposé t ces trois angles ou ans, p, q, r, on connoitra la situation du corps, & partant aussi son mouvement, puisque ces trois quantités seront variables avec le mouvement du corps, pendant que les points A & C demeurent fixes. Car de là on pourra déterminer à ce même instant le lieu où se trouvera chaque élément du corps Z, puisqu'on en sait la situation par rapport à l'axe OM & au premier méridien du corps ML. Pour cet effet, tirons du centre O par cet élément Z le rayon OZN, & posant la distance OZ $= s$, on aura premierement l'angle MON, dont la mesure sera l'arc MN, qui soit $= u$; de plus on saura aussi l'inclinaison du plan MON au premier méridien du corps OML ou l'angle LMN, qui soit $= v$; de sorte que la position de cet élément Z par rapport au corps sera déterminée par les quantités s, u, & v, qui demeureront constantes, tant qu'on considere le même élément, quel que soit le mouvement du corps: & partant ces quantités s, u, v, seront indépendantes du tems t, dont les trois autres quantités p, q, r, qui dépendent du mouvement du corps, sont des fonctions.

Or

Or, comparant les quantités s, u, v, avec les trois variables p, q, r, on pourra déterminer pour l'instant présent le lieu de l'élément du corps Z par rapport à la sphere fixe. Car, tirant par le point N le cercle vertical CNQ, on aura dans le triangle sphérique CMN, 1°. le côté $CM = q$; 2°. le côté $MN = u$; & 3°. l'angle $CMN = CML - LMN = r - v$. De là on trouvera

$$\cos CN = \cos(r - v) \sin q \sin u + \cos q \cos u,$$

$$\text{tang } MCN = \frac{\sin(r - v) \sin u}{\sin q \cos u - \cos(r - u) \cos q \sin u}.$$

& ayant trouvé l'angle MCN, on aura la distance au premier vertical CA, ou l'angle $ACN = ACM + MCN$. De plus on pourra aussi déterminer le lieu de l'élément Z par trois coordonnées orthogonales, dont nous aurons besoin dans le calcul suivant. Pour cet effet, qu'on baisse du point Z sur le plan horizontal la perpendiculaire ZY & du point Y qu'on tire la perpendiculaire YX au rayon fixe OA; & soient $OX = x$; $XY = y$; & $YZ = z$. De là on aura d'abord $YZ = z = OZ \sin QN = s \cos CN$, donc $z = s(\cos(r - v) \sin q \sin u + \cos q \cos u)$. De même on aura $OY = s \sin CN$, & puisque l'angle $AOQ = ACN = p + MCN$, on en tirera

$$XY = y = s \sin CN \sin(p + MCN), \quad \&$$
$$OX = x = s \sin CN \cos(p + MCN).$$

Or par la trigonométrie sphérique nous savons qu'il est:

$$\sin CN . \sin MCN = \sin(r - v) \sin u,$$
$$\sin CN . \cos MCN = \sin q \cos u - \cos(r - v) \cos q \sin u,$$

donc, puisque

$$\sin(p + MCN) = \sin p \cos MCN + \cos p \sin MCN, \quad \&$$
$$\cos(p + MCN) = \cos p \cos MCN - \sin p \sin MCN,$$

on aura

$$y = s(\sin p \sin q \cos u - \sin p \cos(r-v) \cos q \sin u + \cos p \sin(r-v) \sin u),$$

$$x = s(\cos p \sin q \cos u - \cos p \cos(r-v) \cos q \sin u - \sin p \sin(r-v) \sin u),$$

C'eſt donc par ce moyen qu'on ſe formera une juſte idée du mouvement du corps propoſé.

Corollaire I.

2. Dans le triangle ſphérique CMN on trouvera auſſi aiſément l'angle CNM, par cette formule

$$\text{tang } CNM = \frac{\sin(r-v)\sin q}{\cos q \sin u - \cos(r-v)\sin q \cos u},$$

& de là on obtiendra ces formules

$$\sin CN.\ \sin CNM = \sin(r-v)\sin q,$$

$$\sin CN.\ \cos CNM = \cos q \sin u - \cos(r-v)\sin q \cos u.$$

Corollaire II.

3. Les formules trouvées pour les trois coordonnées x, y, z, auront lieu pour tous les élémens du corps ſitués dans le rayon ON, en ne changeant que la diſtance OZ $= s$, les deux angles u & v demeurent les mêmes. Car on aura:

$$\frac{x}{s} = \cos p \sin q \cos u - \cos p \cos(r-v)\cos q \sin u - \sin p \sin(r-v)\sin u,$$

$$\frac{y}{s} = \sin p \sin q \cos u - \sin p \cos(r-v)\cos q \sin u + \cos p \sin(r-v)\sin u,$$

$$\frac{z}{s} = \cos(r-v)\sin q \sin u + \cos q \cos u.$$

Corol-

COROLLAIRE III.

4. De là il eſt clair, qu'il y aura:

1°. $\frac{x\cos p + y\sin p}{s} = \sin q\cos u - \cos(r-v)\cos q\sin u,$

2°. $\frac{y\cos p - x\sin p}{s} = \sin(r-v)\sin u,$

3°. $\frac{z\cos q + x\cos p\sin q + y\sin p\sin q}{s} = \cos u,$

4°. $\frac{z\sin q - x\cos p\cos q - y\sin p\cos q}{s} = \cos(r-v)\sin u,$

5°. $\frac{z\sin q\cos(r-v) - x(\cos p\cos q\cos(r-v) + \sin p\sin(r-v)) - y(\sin p\cos q\cos(r-v) - \cos p\sin(r-v))}{s} = \sin u,$

6°. $z\sin q\sin(r-v) - x(\cos p\cos q\sin(r-v) - \sin p\cos(r-v)) - y(\sin p\cos q\sin(r-v) + \cos p\cos(r-v)) = 0,$

& enfin

7°. $xx + yy + zz = ss.$

COROLLAIRE IV.

5. Si l'élément Z eſt pris dans l'axe même OM du corps, l'angle MON ou l'arc MN $= u$ évanouïra, & les trois coordonnées pour ce point Z, poſant ſa diſtance au centre de gravité OZ $= s$, ſeront:

$$\frac{x}{s} = \cos p\ \sin q; \quad \frac{y}{s} = \sin p\ \sin q; \quad \& \ \frac{z}{s} = \cos q,$$

PROBLEME II.

6. *Quelque mouvement qu'ait le corps autour de ſon centre de gravité* O, *trouver pour chaque inſtant le rayon* ON, *de ſorte que les élémens du corps ſitués dans ce rayon demeurent immobiles pendant cet inſtant.*

SOLU-

SOLUTION.

J'ai déjà demontré que, quel que soit le mouvement du corps, son centre de gravité demeurant en repos, il y a toujours à chaque instant une ligne dans le corps, qui n'a aucun mouvement, & autour de laquelle le corps tourne pendant cet instant. Soit donc ON cette ligne autour de laquelle le corps tourne à l'instant présent, & il est clair que cette ligne, ou le point N, aura cette propriété, que pendant que le point M & le méridien ML changent infiniment peu de place, le point N demeure fixe. Donc, posant pour ce point N l'arc $MN = u$, & l'angle $LMN = v$, ce point aura cette propriété que, pendant que les quantités p, q, r, croissent de leurs différentiels dp, dq, dr, tant la distance CN que l'angle ACN n'en souffrent aucun changement: ou bien posant les quantités p, q, r, variables, nous trouverons ce point N, si nous mettons égaux à zéro les différentiels des quantités CN & ACN. Donc nous aurons $d.\,CN = 0$, & puisque $ACN = p + MCN$, nous aurons de plus $dp + d.\,MCN = 0$, ou $d.\,MCN = -dp$. Ayant donc $\cos CN = \cos(r - v) \sin q . \sin u + \cos q \cos u$, nous aurons premierement,

$$-dr \sin(r-v) \sin q \sin u + dq \cos(r-v) \cos q \sin u - dq \sin q \cos u = 0,$$

Ensuite, puisque $\sin CN . \sin MCN = \sin(r - v) \sin u$, la différentiation nous fournira

$$d.MCN.\sin CN \cos MCN = -dp \sin CN \cos MCN = dr \cos(r-v) \sin u,$$

& mettant pour $\sin CN \cos MCN$ sa valeur, nous obtiendrons cette équation:

$$dp \sin q \cos u - dp \cos(r-v) \cos q \sin u + dr \cos(r-v) \sin u = 0.$$

La premiere de ces équations donne

$$\sin q \cos u - \cos(r-v) \cos q \sin u = -\frac{dr}{dq} \sin(r-v) \sin q . \sin u,$$

&

& l'autre

$$\sin q \cos u - \cos(r-v) \cos q \sin u = -\frac{dr}{dp} \cos(r-v) \sin u,$$

d'où nous tirons, en diviſant par $-dr \sin u$:

$$\frac{\sin(r-v) \sin q}{dq} = \frac{\cos(r-v)}{dp},$$

ou bien $\text{tang}(r-v) = \frac{dq}{dp \sin q}$, de là nous aurons:

$$\sin(r-v) = \frac{dq}{\sqrt{(dp^2 \sin q^2 + dq^2)}}, \quad \&$$

$$\cos(r-v) = \frac{dp \sin q}{\sqrt{(dp^2 \sin q^2 + dq^2)}},$$

ces valeurs, étant ſubſtituées dans l'une ou l'autre des deux équations donneront

$$\sin q \cos u = \frac{dp \sin q \cos q \sin u - dr \sin q \sin u}{\sqrt{(dp^2 \sin q^2 + dq^2)}},$$

& partant $\text{tang}\, u = \frac{\sqrt{(dp^2 \sin q^2 + dq^2)}}{dp \cos q - dr}$, donc

$$\sin u = \frac{\sqrt{(dp^2 \sin q^2 + dq^2)}}{\sqrt{(dp^2 + dq^2 + dr^2 - 2\,dp\,dr \cos q)}}, \quad \&$$

$$\cos u = \frac{dp \cos q - dr}{\sqrt{(dp^2 + dq^2 + dr^2 - 2\,dp\,dr \cos q)}}.$$

Maintenant, ſubſtituant ces valeurs, nous aurons pour la poſition du point N, & partant auſſi pour celle du rayon ON qui demeure immobile pendant l'inſtant préſent.

$$\cos CN = \frac{dp - dr \cos q}{\sqrt{(dp^2 + dq^2 + dr^2 - 2\,dp\,dr \cos q)}}, \quad \&$$

$$\sin CN = \frac{\sqrt{(dq^2 + dr^2 \sin q^2)}}{\sqrt{(dp^2 + dq^2 + dr^2 - 2\,dp\,dr \cos q)}},$$

& ensuite, $\operatorname{tang} MCN = -\frac{dq}{dr \sin q}$; d'où nous tirons

$$\operatorname{tang} ACN = \frac{dr \sin p \sin q - dq \cos p}{dr \sin p \sin q - dq \sin p}.$$

Corollaire I.

7. Si nous prenons dans ce rayon ON un point quelconque Z, de sorte que $OZ = s$, & que nous le rapportions aux trois coordonnées $OX = x$, $XY = y$, & $YZ = z$, nous aurons

$$\frac{x}{s} = \frac{-dq \sin p - dr \cos p \sin q}{\sqrt{(dp^2 + dq^2 + dr^2 - 2\,dp\,dr \cos q)}},$$

$$\frac{y}{s} = \frac{dq \cos p - dr \sin p \sin q}{\sqrt{(dp^2 + dq^2 + dr^2 - 2\,dp\,dr \cos q)}},$$

$$\frac{z}{s} = \frac{dp - dr \cos q}{\sqrt{(dp^2 + dq^2 + dr^2 - 2\,dp\,dr \cos q)}}.$$

Corollaire II.

8. Puisqu'à l'instant présent tout le corps se tourne autour de la ligne ON, la direction de mouvement de chaque élément du corps sera perpendiculaire au plan qui passe par ON & par cet élément, & sa vitesse sera proportionelle à la distance de chaque élément depuis le rayon ON.

Corollaire III.

9. Donc, dès qu'on sait la vitesse d'un seul point du corps, on en déterminera aisément la vitesse de tout autre point de ce corps: on n'a

n'a besoin que de savoir la vitesse de rotation dont ce corps tourne autour du rayon ON: & cette vitesse de rotation se trouvera en divisant la vitesse d'un point quelconque par sa distance de ce point au rayon ON.

COROLLAIRE IV.

10. Or, pendant l'élément du tems dt, le point M de l'axe du corps parvient en m, de sorte que l'angle $MCm = dp$, & $Cm = q + dq$: donc, décrivant du centre C l'arc infiniment petit Mr, on aura $mr = dq$, & $Mr = dp \sin q$: d'où l'espace décrit par le point M sera $Mm = \sqrt{(dp^2 \sin q^2 + dq^2)}$, qui étant divisé par le tems dt exprimera la vitesse du point Fig. 3.

$$M = \frac{\sqrt{(dp^2 \sin q^2 + dq^2)}}{dt}.$$

COROLLAIRE V.

11. Mais la distance du point M à l'axe ON étant $=$ $\sin MN = \sin u$, la vitesse de rotation de ce point M, & partant aussi celle de tout le corps autour du rayon ON, sera $=$ Fig 2.

$$\frac{\sqrt{(dp^2 \sin q^2 + dq^2)}}{dt \sin u}.$$

Or, ayant trouvé

$$\sin u = \frac{\sqrt{(dp^2 \sin q^2 + dq^2)}}{\sqrt{(dp^2 + dq^2 + dr^2 - 2\,dp\,dr \cos q)}},$$

la vitesse de rotation du corps autour du rayon ON sera $=$

$$\frac{1}{dt} \sqrt{(dp^2 + dq^2 + dr^2 - 2\,dp\,dr \cos q)},$$

COROLLAIRE VI.

12. Ici il faut remarquer, que les lettres p, q, r, marquent des arcs de cercles pris dans un cercle dont le rayon ou le sinus total est $= 1$. Car, quoique j'aye supposé la sphere ACBD infinie

Aa 2 pour

pour avoir un espace absolu & immobile, rien n'empêche que cette sphere ne soit finie, pourvu qu'elle représente un espace immobile, & partant il est permis d'exprimer le rayon de cette sphere OM, ou ON, par l'unité, puisque sa grandeur absolue n'entre en aucune façon dans le calcul.

Remarque I.

13. C'est ainsi qu'on se pourra le mieux représenter le vrai mouvement de la terre autour de son centre. Soit pour cet effet la terre le corps, dont je suppose le centre de gravité en O, & soit dans la sphere céleste C le pole de l'écliptique, & le cercle ADB l'écliptique même; & CA un cercle de latitude fixe. Soit pour l'instant présent M le lieu du pole de la terre, qui change comme on sait successivement de place dans le Ciel, de sorte qu'il approche tantôt plus tantôt moins du pole de l'écliptique C, outre que son mouvement en longitude selon l'angle ACM n'est pas uniforme. Mais, puisque cette nutation est extrèmement petite, je supposerai ici, que le pole de la terre M tourne également autour du pole de l'écliptique C, duquel il conserve toujours la même distance $CM = q$. Soit donc la longitude du pole de la terre, ou l'angle $ACM = p$, qui dans un an diminue d'environ 50″: De plus, soit pour l'instant présent ML le premier Méridien de la terre, & posant l'angle $CML = r$, on sait que cet angle va en augmentant de 360° dans un jour. Donc, dans un an, l'accroissement de l'angle r sera $= 365\frac{1}{4}.\ 360° = 365\frac{1}{4}.\ 360.\ 60.\ 60''$; d'où il s'ensuit que $dp : dr = -50 : 365\frac{1}{4}.\ 360.\ 60.\ 60$; ou bien $\frac{dr}{dp} = -9467280$; & $\frac{dq}{dp} = 0$.

On voit donc que la terre ne tourne pas autour de son axe OM, mais autour d'un autre axe variable ON, dont le point N tombera dans le cercle CMP, puisque, à cause de $dq = 0$, nous avons $\operatorname{tang}(r - v) = 0$, & partant $\sin(r - u) = 0$, & $\operatorname{cos}(r - v) = 1$. De là nous obtiendrons

$$\sin q \cos u - \cos q \sin u = 9467280 \sin u.$$

Donc

Donc $\tan u = \tan \mathrm{MN} = \dfrac{\sin q}{9467280 + \cos q}$, & partant la diſtance $\mathrm{MN} = 31^{\mathrm{IV}}$.

Par conſéquent le point du ciel autour duquel la terre tourne à chaque inſtant n'eſt pas celui qui répond au pole de la terre, mais il en eſt éloigné vers le pole de l'écliptique C d'un intervalle de 34^{IV}, ou de la $\frac{1}{113}$ partie d'une ſeconde.

Soit μ ce point autour duquel la terre tourne dans l'inſtant préſent, le pole étant en M, & ce mouvement de rotation ſera tant ſoit peu différent de celui dont nous concevons que la terre tourne autour de ſon axe, & qui eſt indiqué par $\frac{dr}{dt}$. Car la viteſſe de rotation autour du point μ étant Fig. 3.

$$= \frac{1}{dt} \sqrt{(dp^2 + dq^2 + dr^2 - 2\,dp\,dr \cos q)},$$

ſera aſſez exactement $= \dfrac{dr - dp \cos q}{dt}$: donc poſant la viteſſe de rotation autour du pole $\mathrm{M} = \alpha$, celle autour du point μ ſera $= \alpha\left(1 - \dfrac{dp}{dt}\cos q\right) = 1\frac{1}{10487210}\,\alpha$, & partant tant ſoit peu plus grande que α. Mais ce mouvement autour du point μ ne dure qu'un inſtant: car, dès que le pole M eſt porté hors du cercle CMP, le mouvement de rotation ſe fera autour d'un autre point, qui ſera alors ſitué au deſſus du pole, vers le pole de l'écliptique C, à une diſtance $= \frac{1}{113}$ d'une ſeconde, & partant dans l'eſpace de 24 heures la terre tournera ſucceſſivement autour de tous les points de la circonférence du petit cercle, décrit du centre M, avec le rayon $= \frac{1}{113}$ ſeconde, & à chaque inſtant la rotation ſe fera autour celui de ces points qui ſe trouvera au deſſus du pole M, vers le pole de l'écliptique C.

Remarque II.

14. Puisqu'il y a toujours un rayon du corps ON, autour duquel le corps tourne à chaque instant, quel que soit le mouvement du corps, nous en tirerons d'abord deux especes de mouvement; l'une, quand le corps tourne constamment autour du même axe, & l'autre, quand cet axe de rotation change à chaque instant. Le mouvement du corps sera donc de la premiere espece, lorsque les expressions trouvées tant pour CN que pour l'angle ACN deviennent constantes; & comme cette espece est fort remarquable, vu qu'elle renferme seule tout ce qu'on a dit presque jusques ici dans la Mécanique, du mouvement des corps solides, il sera à propos de découvrir les caracteres, desquels on puisse d'abord reconnoitre si un cas proposé apartient à cette espece ou non? Posons donc que le corps tourne autour d'un axe fixe ON, & voyons quel rapport doit alors subsister parmi les variables p, q, & r. Soit pour cet effet l'angle $ACN = f$, la distance $CN = h$, & les autres constantes $MN = u$, & l'angle $LMN = v$. Donc, ayant dans le triangle sphérique MCN les trois côtés $CM = q$, $CN = h$, & $MN = u$, on trouvera le rapport suivant des autres variables p & r

$$\cos(r - v) = \frac{\cos h - \cos q \cos u}{\sin q \sin u}, \qquad \&$$

$$\cos(f - p) = \frac{\cos u - \cos h \cos q}{\sin h \sin q},$$

& toutes les fois que p & r seront tellement dépendantes des constantes f, h, u, v, & de la variable q, le mouvement de rotation sera de la premiere espece, & se fera autour d'un axe fixe ON, dont la position sera connue par les constantes f & h. De plus ayant:

$$- dr \sin(r - v) = - \frac{dq \cos h \cos q + dq \cos u}{\sin u \sin q^2},$$

$$dp \sin(f - p) = - \frac{dq \cos u \cos q + dq \cos h}{\sin h \sin q^2},$$

puis-

puisque $\sin(r-v) = \frac{\sqrt{(1-\cos h^2-\cos u^2-\cos q^2+2\cos h\cos u\cos q)}}{\sin q\sin u}$;

& $\sin(f-p) = \frac{\sqrt{(1-\cos h^2-\cos u^2-\cos q^2+2\cos h\cos u\cos q)}}{\sin h\sin q}$,

nous aurons:

$$\frac{dr}{dq} = \frac{-\cos u + \cos h\cos q}{\sin q\sqrt{(1-\cos h^2-\cos u^2-\cos q^2+2\cos h\cos u\cos q)}},$$

$$\frac{dp}{dq} = \frac{\cos h - \cos u\cos q}{\sin q\sqrt{(1-\cos h^2-\cos u^2-\cos q^2+\cos h\cos u\cos q)}},$$

d'où par le §. 11. nous trouverons la viteſſe de rotation:

$$= \frac{dq\sin q}{dt\sqrt{(1-\cos h^2-\cos u^2-\cos q^2+2\cos h\cos u\cos q)}},$$

ou bien elle ſera $= \frac{dr\sin q^2}{dt(\cos h\cos q-\cos u)} = \frac{dp\sin q^2}{dt(\cos h-\cos u\cos q)}$

$$= \frac{-dr\sin q}{dt\sin h\cos(f-q)} = \frac{dp\sin q}{dt\sin u\cos(r-v)}.$$

Cette viteſſe de rotation s'exprimera encore plus promptement par l'angle CNM, & on l'aura $= \frac{d.\,\text{CNM}}{dt}$; or nous avons

$$\cos\text{CNM} = \frac{\cos q - \cos h\cos u}{\sin h\sin u}.$$

Donc, ſi le mouvement de rotation eſt conſtant $= \alpha$, on aura pour ce cas $\alpha = \frac{d.\,\text{CNM}}{dt}$, & partant $\text{CNM} = \alpha t + \beta$, ou bien

$$\cos q = \cos h\cos u + \sin h\sin u\cos(\alpha t + \beta).$$

Donc, ſi la variable q dépend de cette maniere du tems t, & que les deux autres p & r dépendent de q, comme nous venons de l'indiquer, alors

alors le corps ne tournera pas seulement autour d'un axe fixe, mais son mouvement de rotation sera aussi uniforme $= a$.

PROBLEME III.

15. *Le mouvement du corps qui tourne autour de son centre de gravité O, étant supposé quelconque, trouver les forces dont chacun de ses élémens doit être sollicité, pour que le corps soit mis en état de poursuivre son mouvement.*

SOLUTION.

Fig. 2. Dès que les trois quantités ACM $= p$, CM $= q$, & CML $= r$, marquent des fonctions déterminées du tems t, le mouvement du corps sera aussi déterminé: car de là on pourra pour tout tems proposé, assigner le lieu du pole M, & la position du Méridien ML, d'où l'on connoit en quels points se trouveront les élémens du corps: & partant on en connoitra aussi leur mouvement. Qu'on considere donc un élément du corps quelconque Z, pour la situation duquel à l'égard de l'axe OM, & du Méridien, soit QZ $= s$, MN $= u$, & LMN $= v$. Ensuite, qu'on rapporte aussi ce point Z aux trois coordonnées orthogonales OX $= x$, XY $= y$, & YZ $= z$, dont les directions sont fixes, & indépendantes du mouvement du corps: car, pour trouver les forces requises, il faut toujours décomposer le mouvement suivant des directions fixes. Donc, si nous décomposons le mouvement de l'élément Z suivant ces trois directions, nous aurons:

sa vitesse selon la direction OX $= \frac{dx}{dt}$,

sa vitesse selon la direction XY $= \frac{dy}{dt}$,

sa vitesse selon la direction YZ $= \frac{dz}{dt}$,

&

& ſuivant ces mêmes directions il faut que l'élément Z ſoit ſollicité par des forces accélératrices, qui ſeront

la force accélératrice ſelon OX $= \frac{2ddx}{dt^2}$,

la force accélératrice ſelon XY $= \frac{2ddy}{dt^2}$,

la force accélératrice ſelon YZ $= \frac{2ddz}{dt^2}$,

où, en prenant ces différentio-différentiels, on ſuppoſe l'élément du tems dt conſtant. Or les quantités x, y, z, ne ſont variables, qu'entant qu'elles renferment les quantités p, q, r, qui ſont des fonctions du tems t; car s, u, & v, ſont conſtantes tant qu'on conſidere le même point Z. Pour trouver ces différentiels, il faut donc prendre les valeurs de x, y, & z, trouvées ci-deſſus (3); or, pour rendre les expreſſions plus courtes, poſons

$$\sin(r - v)\sin u = K; \qquad \cos(r - v)\sin u = L,$$

$$\sin q\cos u - \cos(r - v)\cos q\sin u = M,$$

$$\cos q\cos u + \cos(r - v)\sin q\sin u = N,$$

& nous aurons:

$$\frac{x}{s} = M\cos p - K\sin p,$$

$$\frac{y}{s} = M\sin p + K\cos p,$$

$$\frac{z}{s} = N.$$

Maintenant, pour trouver les différentiels, puisque u & v & s ſont des quantités conſtantes, nous aurons:

$$dK = L\,dr; \qquad dL = -K\,dr,$$

$$dM = N\,dq + K\,dr\cos q, \quad \& \quad dN = -M\,dq - K\,dr\sin q,$$

 &

& partant nous obtiendrons :

$$\frac{dx}{s} = -\frac{y\,dp}{s} + N\,dq\cos p + K\,dr\cos p\cos q - L\,dr\sin p,$$

$$\frac{dy}{s} = \frac{x\,dp}{s} + N\,dq\sin p + K\,dr\sin p\cos q + L\,dr\cos p,$$

$$\frac{dz}{s} = -M\,dq - K\,dr\sin q.$$

Passons de là aux seconds différentiels, & nous trouverons

$$\begin{aligned}\frac{ddx}{s} = -\frac{y\,ddp}{s} - \frac{x\,dp^2}{s} & - N\,dp\,dq\sin p - K\,dp\,dr\sin p\cos q - L\,dp\,dr\cos p \\ & + N\,ddq\cos p - M\,dq^2\cos p - N\,dp\,dq\sin p - K\,dp\,dr\sin p\cos q - L\,dp\,dr\cos p \\ & + K\,ddr\cos p\cos q + L\,dr^2\cos p\cos q \qquad - K\,dq\,dr\cos p\sin q \\ & - L\,ddr\sin p \qquad + K\,dr^2\sin p \qquad - K\,dq\,dr\cos p\sin q\end{aligned}$$

ou bien

$$\begin{aligned}\frac{ddx}{s} = & -\frac{y\,ddp}{s} + N\,ddq\cos q + ddr\,(K\cos p\cos q - L\sin p) \\ & -\frac{x\,dp^2}{s} - M\,dq^2\cos p + dr^2\,(L\cos p\cos q + K\sin p) \\ & - 2N\,dp\,dq\sin p - 2K\,dp\,dr\sin p\cos q - 2K\,dq\,dr\cos p\sin q \\ & - 2L\,dp\,dr\cos p\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{ddy}{s} = & \frac{x\,ddp}{s} + N\,ddq\sin p + ddr\,(K\sin p\cos q + L\cos p) \\ & -\frac{y\,dp^2}{s} - M\,dq^2\sin p + dr^2\,(L\sin p\cos q - K\cos p) \\ & + 2N\,dp\,dq\cos p + 2K\,dp\,dr\cos p\cos q - 2K\,dq\,dr\sin p\sin q \\ & - 2L\,dp\,dr\sin p\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{ddz}{s} = & - M\,ddq - K\,ddr\sin q \\ & - N\,dq^2 - L\,dr^2\sin q - 2K\,dq\,dr\cos q.\end{aligned}$$

Donc

Donc les forces accélératrices de l'élément Z seront:

$$\text{I. selon OX} = \frac{2s}{dt^2}\left\{\begin{matrix} -\frac{yddp}{s} + \mathrm{N}ddq\cos p + ddr(\mathrm{K}\cos p\cos q - \mathrm{L}\sin p) \\ -\frac{xdp^2}{s} - \mathrm{M}dq^2\cos p + dr^2(\mathrm{L}\cos p\cos q + \mathrm{K}\sin p) \\ -2\mathrm{N}dpdq\sin p - 2dpdr(\mathrm{K}\sin p\cos q + \mathrm{L}\cos p) - 2\mathrm{K}dqdr\cos p\sin q \end{matrix}\right]$$

$$\text{II. selon XY} = \frac{2s}{dt^2}\left\{\begin{matrix} \frac{xddp}{s} + \mathrm{N}ddq\sin p + ddr(\mathrm{K}\sin p\cos q + \mathrm{L}\cos p) \\ -\frac{ydp^2}{s} - \mathrm{M}dq^2\sin p + dr^2(\mathrm{L}\sin p\cos q - \mathrm{K}\cos p) \\ +2\mathrm{N}dpdq\cos p + 2dpdr(\mathrm{K}\cos p\cos q - \mathrm{L}\sin p) - 2\mathrm{K}dqdr\sin p\sin q \end{matrix}\right]$$

$$\text{III. selon YZ} = \frac{2s}{dt^2}\left\{\begin{matrix} -\mathrm{M}ddq - \mathrm{K}ddr\sin q \\ -\mathrm{N}dq^2 - \mathrm{L}dr^2\sin q - 2\mathrm{K}dqdr\cos q \end{matrix}\right]$$

Corollaire I.

16. Les deux premieres forces selon OZ & selon XY, dont les expressions sont assez compliquées, deviennent plus simples par la combinaison: car nous aurons

$$\text{force OX}\cos p + \text{force XY}\sin p = \frac{2s}{dt^2}\left\{\begin{matrix} -\mathrm{K}ddp + \mathrm{N}ddq + \mathrm{K}ddr\cos q \\ -\mathrm{M}dp^2 - \mathrm{M}dq^2 + \mathrm{L}dr^2\cos q \\ -2\mathrm{L}dpdr - 2\mathrm{K}dqdr\sin q \end{matrix}\right]$$

$$\text{force OX}\sin p - \text{force XY}\cos p = \frac{2s}{dt^2}\left\{\begin{matrix} -\mathrm{M}ddp - \mathrm{L}ddr \\ -\mathrm{K}dp^2 - \mathrm{K}dr^2 \\ -2\mathrm{N}dpdq - 2\mathrm{K}dpdr\cos q \end{matrix}\right]$$

Corollaire II.

17. Or, si nous tirons la droite OP, & que nous y tirions du point Y la perpendiculaire YV, pour rapporter l'élément Z aux

trois

trois coordonnées OV, VY, & YZ; nous pourrons réduire les deux forces trouvées suivant OX & XY à deux autres suivant OV & VY; & à cause de l'angle AOP $= p$; la force selon OV sera $=$ force OX cos$p$ $+$ force XY. sin$p$; & la force selon VY $=$ force XY cos$p$ $-$ force OX sin$p$.

COROLLAIRE III.

18. Donc les forces accélératrices, dont l'élément Z doit être sollicité, se réduiront aussi aux trois forces suivantes

$$\text{I. selon OV} = \frac{2s}{dt^2}\left\{\begin{array}{l} -Kddp + Nddq + Kddr\cos q - Mdp^2 - Mdq^2 \\ + Ldr^2\cos q - 2Ldpdr - 2Kdqdr\sin q \end{array}\right\}$$

$$\text{II. selon VY} = \frac{2s}{dt^2}\left\{\begin{array}{l} Mddp + Lddr - Kdp^2 - Kdr^2 \\ + 2Ndpdq + 2Kdpdr\cos q \end{array}\right\}$$

$$\text{III. selon YZ} = \frac{2s}{dt^2}\left\{\begin{array}{l} -Mddq - Kddr\sin q - Ndq^2 - Ldr^2\sin q \\ -2Kdqdr\cos q \end{array}\right\}$$

COROLLAIRE IV.

19. Si nous menons sur l'horizon le rayon OR perpendiculaire au rayon OP, pour avoir trois axes OP, OR, OC perpendiculaires entr'eux, l'élément Z sera sollicité par trois forces dont les directions sont paralleles à ces trois axes OP, OR, & OC, & ces trois forces seront les mêmes que celles qui ont été marquées dans le corollaire précédent.

PROBLEME IV.

Fig. 4. 20. *Les trois forces, dont l'élément* Z *est sollicité, étant trouvées suivant trois directions* OP, OR, OC, *perpendiculaires entr'elles, réduire les mêmes forces à trois autres directions* OM, OS, OT, *qui sont aussi perpendiculaires entr'elles & qui dépendent du premier Méridien* OML *du corps.*

SOLU-

SOLUTION.

Soient F, G, H, les forces, dont l'élément Z est sollicité suivant les directions OP, OR, & OC; & on sait par les principes de la Statique, que les trois forces cherchées selon les nouvelles directions OM, OS, OT, seront exprimées de la maniere suivante, concevant que les points P, R, C, M, S, T, sont joints ensemble par des arcs des grands cercles:

$$\text{Force selon } OM = F \cos PM + G \cos RM + H \cos CM,$$

$$\text{Force selon } OS = F \cos PS + G \cos RS + H \cos CS,$$

$$\text{Force selon } OT = F \cos PT + G \cos RT + H \cos CT,$$

Maintenant, pour trouver ces cosinus, que le premier Méridien du corps OMS, dans lequel se trouvent deux de ces dernieres directions OM & OS, coupe l'horizon au point L, & posant $PL = f$; $PLM = g$, & $LM = h$, on trouvera par les regles de la trigonométrie sphérique.

$$\cos CT = \cos g$$

$$\cos PT = -\sin f \sin g$$

$$\cos RT = \cos f \sin g$$

$$\cos CM = \sin g \sin h$$

$$\cos CS = -\sin g \cos h$$

$$\cos PM = \cos f \cos h + \cos g \sin f \sin h$$

$$\cos RM = \sin f \cos h - \cos g \cos f \sin h$$

$$\cos PS = \cos f \sin h - \cos g \sin f \cos h$$

$$\cos RS = \sin f \sin h + \cos g \cos f \cos h.$$

Or, ayant pour notre cas $CM = q$, & $CML = r$, il y aura

$$\cos g = \sin q \sin r;\ \tang f = \frac{-\cos q \sin r}{\cos r},\ \&\ \tang h = \frac{-\cos q}{\sin q \sin r},$$

& substituant ces valeurs, nous obtiendrons:

$$\begin{aligned}
\cos CT &= \sin q \sin r & \cos PM &= \sin q\\
\cos PT &= -\cos q \sin r, & \cos RM &= 0,\\
\cos RT &= -\cos r & \cos PS &= -\cos q \cos r\\
\cos CM &= \cos q & \cos RS &= \sin r\\
\cos CS &= \sin q \cos r & &
\end{aligned}$$

& les trois forces accélératrices F, G, H, ont été trouvées

$$F = \frac{2s}{dt^2}\left\{\begin{array}{l} -Kddp + Nddq + Kddr \cos q - Mdp^2 - Mdq^2 \\ \quad + Ldr^2 \cos q - 2Ldpdr - 2Kdqdr \sin q) \end{array}\right.$$

$$G = \frac{2s}{dt^2}\left\{ Mddp + Lddr - Kdp^2 - Kdr^2 + 2Ndpdq + 2Kdpdr \cos q) \right.$$

$$H = \frac{2s}{dt^2}\left\{ -Mddq - Kddr \sin q - Ndq^2 - Ldr^2 \sin q - 2Kdqdr \cos q) \right.$$

Et partant, ayant substitué ces valeurs, les forces accélératrices cherchées suivant les trois directions OM, OS, & OT, seront

$$\text{I. selon } OM = \frac{2s}{dt^2}\left\{\begin{array}{l} -Kddp \sin q + Lddq - Mdp^2 \sin q - dq^2 \cos u \\ \quad - 2Ldpdr \sin q - 2Kdqdr \end{array}\right\}$$

$$\text{II. selon } OS = \frac{2s}{dt^2}\left\{\begin{array}{l} +ddp(K\cos q\,\mathrm{cs}\,r + M\sin r) - ddq\,\mathrm{cs}\,r\,\mathrm{cs}\,u + ddr \sin u \sin v \\ \quad + dp^2(M\,\mathrm{cs}\,q\,\mathrm{cs}\,r - K\sin r) - Ldq^2\,\mathrm{cs}\,r - dr^2 \sin u\,\mathrm{cs}\,v \\ \quad + 2Ndpdq \sin r + 2dpdr \sin u \cos v \cos q \end{array}\right\}$$

$$\text{III. selon } OT = \frac{2s}{dt^2}\left\{\begin{array}{l} +ddp(K\cos q \sin r - M\,\mathrm{cs}\,r) - ddq \sin r\,\mathrm{cs}\,u - ddr \sin u\,\mathrm{cs}\,v \\ \quad + dp^2(M\,\mathrm{cs}\,q \sin r + K\,\mathrm{cs}\,r) - Ldq^2 \sin r - dr^2 \sin u \sin v \\ \quad - 2Ndpdq \cos r + 2dpdr \sin u \sin v \cos q \end{array}\right\}$$

COROL-

Corollaire I.

21. Les deux dernieres forces donnent par une double combinaiſon :

$$\text{force OS}\cos r + \text{force OT}\sin r = \frac{2s}{dt^2}\left\{\begin{array}{l} \mathrm{K}ddq\cos q - ddq\cos u - ddr\sin u\sin(r-v) \\ +\mathrm{M}dp^2\cos q - \mathrm{L}dq^2 - dr^2\sin u\cos(r-v) \\ \quad + 2dpdr\sin u\cos q\cos(r-v) \end{array}\right\}$$

$$\text{force OS}\sin r - \text{force OT}\cos r = \frac{2s}{dt^2}\left\{\begin{array}{l} \mathrm{M}ddp + ddr\sin u\cos(r-v) - \mathrm{K}dp^2 \\ \quad - dr^2\sin u\sin(r-v) + 2\mathrm{N}dpdq \\ \quad + 2dpdr\sin u\cos q\sin(r-v) \end{array}\right\}$$

Corollaire II.

22. Mais il vaudra mieux garder dans le calcul les forces accélératrices ſelon les directions OM, OS, & OT, qui ſont fixes par rapport au corps, puisque OM eſt ſon axe, MOS le plan de ſon Méridien, & OT eſt perpendiculaire à ce plan. Donc, ſi nous rapportons l'élément du corps Z à ces trois axes, & que nous nommions les trois coordonnées OX $= x$, XY $= y$, & YZ $= z$, nous aurons : Fig. 5.

$$x = s\cos u, \quad y = s\sin u\cos v, \quad \& \quad z = s\sin u\sin v,$$

où il ne faut pas confondre ces coordonnées avec celles qui ont été conſidérées ci-deſſus.

Corollaire III.

23. Introduiſons maintenant, au lieu des angles u & v, les coordonnées x, y, z, & ayant :

$$\mathrm{K} = \frac{y}{s}\sin r - \frac{z}{s}\cos r; \qquad \mathrm{L} = \frac{y}{s}\cos r + \frac{z}{s}\sin r,$$

$$\mathrm{M} = \frac{x}{s}\sin q - \frac{y}{s}\cos q\cos r - \frac{z}{s}\cos q\sin r,$$

$$\mathrm{N} = \frac{x}{s}\cos q + \frac{y}{s}\sin q\cos r + \frac{z}{s}\sin q\sin r,$$

nous

nous aurons la force

$$\text{I. selon OM} = \frac{2}{dt^2}\left\{\begin{array}{l} -ddp\sin q\,(y\sin r - z\cos r) + ddq\,(y\cos r + z\sin r) \\ -dp^2\sin q\,(x\sin q - y\cos q\cos r - z\cos q\sin r) - x\,dq^2 \\ -2\,dp\,dr\sin q\,(y\cos r + z\sin r) - 2\,dq\,dr\,(y\sin r - z\cos r) \end{array}\right]$$

$$\text{II. selon OS} = \frac{2}{dt^2}\left\{\begin{array}{l} +ddp\,(x\sin q\sin r - z\cos q) - x\,ddq\cos r + z\,ddr \\ +dp^2\,(x\,\mathrm{sn}q\,\mathrm{cs}q\,\mathrm{cs}r - y(1 - \mathrm{sn}q^2\,\mathrm{cs}r^2) + z\,\mathrm{sn}q^2\,\mathrm{sn}r\,\mathrm{cs}r) \\ -dq^2\cos r\,(y\cos r + z\sin r) - y\,dr^2 \\ +2\,dp\,dq\sin r\,(x\,\mathrm{cs}q + y\sin q\,\mathrm{cs}r + z\,\mathrm{sn}q\,\mathrm{sn}r) + 2y\,dp\,dr\,\mathrm{cs}q \end{array}\right]$$

$$\text{III. selon OT} = \frac{2}{dt^2}\left\{\begin{array}{l} +ddp\,(y\cos q - x\sin q\cos r) - x\,ddq\sin r - y\,ddr \\ +dp^2\,(x\,\mathrm{sn}q\,\mathrm{cs}q\,\mathrm{sn}r + y\,\mathrm{sn}q^2\,\mathrm{sn}r\,\mathrm{cs}r - z(1 - \mathrm{sn}q^2\,\mathrm{sn}r^2)) \\ -dq^2\sin r\,(y\cos r + z\sin r) - z\,dr^2 \\ -2\,dp\,dq\cos r\,(x\,\mathrm{cs}q + y\sin q\,\mathrm{cs}r + z\sin q\sin r) + z\,dp\,dr\,\mathrm{cs}q \end{array}\right]$$

PROBLEME V.

24. *Trouver les moments des forces, dont l'élément Z est sollicité, par rapport aux trois axes* OM, OS, OT, *qui conservent toujours la même situation à l'égard du corps.*

SOLUTION.

Ayant trouvé les forces accélérarrices, dont l'élément Z est sollicité suivant la direction des trois axes OM, OS, OT, soient P, Q, R, ces forces, & posant la masse de l'élément du corps en Z $= dM$, les forces motrices seront PdM, QdM, RdM. Donc, puisque les forces motrices sont: I. selon la direction OM $= PdM$, II. selon OS $= QdM$, & III. selon OT $= RdM$, & qu'elles sont appliquées au point Z, il en résultera les moments suivans:

Le

Le moment autour de l'axe OT dans le ſens MS:

$$xQdM - yPdM,$$

Le moment autour de l'axe OS dans le ſens MT

$$xRdM - zPdM,$$

Le moment autour de l'axe OM dans le ſens ST

$$yRdM - zQdM.$$

Subſtituons pour P, Q, & R, leurs valeurs trouvées dans §. 23. & nous trouverons pour ces momens les expreſſions ſuivantes.

I. Le moment autour de l'axe OM dans le ſens ST

$$\frac{2dM}{dt^2}\left\{\begin{array}{l}
+(yy+zz)ddp\cos q - xyddp\sin q\cos r - xzddp\sin q\sin r \\
- xyddq\sin r + xzddq\cos r - (yy+zz)ddr \\
+(yy-zz)dp^2\sin q^2\sin r\cos r + xydp^2\sin q\cos q\sin r - xzdp^2\sin q\cos q\cos r \\
- yzdp^2\sin q^2(\cos r^2 - \sin r^2) - (yy-zz)dq^2\sin r\cos r + yzdq^2(\cos r^2 - \sin r^2) \\
- 2yydpdq\sin q\cos r^2 - 2zzdpdq\sin q\sin r^2 - 4yzdpdq\sin q\sin r\cos r \\
- 2xydpdq\cos q\cos r - 2xzdpdq\cos q\sin r
\end{array}\right.$$

II. Le moment autour de l'axe OS dans le ſens MT

$$\frac{2dM}{dt^2}\left\{\begin{array}{l}
-(xx+zz)ddp\sin q\cos r + xyddp\cos q + yzddp\sin q\sin r \\
-(xx+zz)ddq\sin r - yzddq\cos r - xyddr - yzdp^2\sin q\cos q\cos r \\
+(xx-zz)dp^2\sin q\cos q\sin r + xydp^2\sin q^2\sin r\cos r - xzdp^2(\cos q^2 - \sin q^2\sin r^2) \\
- xydq^2\sin r\cos r + xzdq^2\cos r^2 - xzdr^2 \\
- 2xxdpdq\cos q\cos r - 2xydpdq\sin q\cos r^2 - 2xzdpdq\sin q\sin r\cos r \\
+ 2zzdpdr\sin q\sin r + 2xzdpdr\cos q + 2yzdpdr\sin q\cos r \\
- 2zzdqdr\cos r + 2yzdqdr\sin r
\end{array}\right.$$

III. Le moment autour de l'axe OT dans le sens MS

$$\frac{2dM}{dt^2}\left\{\begin{array}{l}
+(xx+yy)ddp\sin q\sin r - xzddp\cos q - yzddp\sin q\cos r \\
-(xx+yy)ddq\cos r - yzddq\sin r + xzddr - yzdp^2\sin q\cos q\sin r \\
+(xx-yy)dp^2\sin q\cos q\cos r - xydp^2(\cos q^2 - \sin q^2\cos r^2) + xzdp^2\sin q^2\sin r\cos r \\
+xydq^2\sin r^2 - xzdq^2\sin r\cos r - xydr^2 \\
+2xxdpdq\cos q\sin r + 2xydpdq\sin q\sin r\cos r + 2xzdpdq\sin q\sin r^2 \\
+2yydpdr\sin q\cos r + 2xydpdr\cos q + 2yzdpdr\sin q\sin r \\
+2yydqdr\sin r - 2yzdqdr\cos r
\end{array}\right.$$

PROBLEME VI.

25. *Pour que le corps puisse poursuivre le mouvement, qui est indiqué par les quantités* p, q, r, *déterminer les momens des forces requises, dont le corps doit être sollicité.*

SOLUTION.

Ayant trouvé les moments élémentaires, que le mouvement de l'élément du corps dM situé en Z exige, on n'a qu'à prendre les intégrales de ces expressions différentielles. Or, pendant que nous considérons le point Z comme variable, les autres quantités qui dépendent du tems demeureront constantes. Nous n'avons donc dans cette recherche d'autres variables que les coordonnées x, y, z, avec l'élément du corps dM, qui sont tellement indépendantes du tems t, que, quel que soit le mouvement du corps, elles demeurent les mêmes, puisqu'elles se rapportent aux trois axes OM, OS, OT, fixés dans le corps. Soit donc M la masse du corps entier, & qu'on cherche de la nature du corps les valeurs intégrales suivantes:

$$\int xx\,dM = Mff, \qquad \int xy\,dM = Mll,$$
$$\int yy\,dM = Mgg, \qquad \int xz\,dM = Mmm,$$
$$\int zz\,dM = Mhh, \qquad \int yz\,dM = Mnn,$$

Cela

Cela posé, les momens des forces requises pour conserver le corps dans le mouvement, que les quantités p, q, r, renferment, seront:

I. Le moment autour de l'axe OM dans le sens ST

$$\frac{2M}{dt^2}\left\{\begin{array}{l}
+(gg+hh)\,ddp\cos q - ll\,ddp\sin q\cos r - mm\,ddp\sin q\sin r \\
- ll\,ddq\sin r + mm\,ddq\cos r - (gg+hh)\,ddr \\
+(gg-hh)\,dp^2\sin q^2\sin r\cos r + ll\,dp^2\sin q\cos q\sin r - mm\,dp^2\sin q\cos q\cos r \\
- nn\,dp^2\sin q^2(\cos r^2-\sin r^2) - (gg-hh)\,dq^2\sin r\cos r + nn\,dq^2(\cos r^2-\sin r^2) \\
- 2gg\,dp\,dq\sin q\cos r^2 - 4nn\,dp\,dq\sin q\sin r\cos r - 2hh\,dp\,dq\sin q\sin r^2 \\
- 2ll\,dp\,dq\cos q\cos r - 2mm\,dp\,dq\cos q\sin r
\end{array}\right.$$

II. Le moment autour de l'axe OS dans le sens MT

$$\frac{2M}{dt^2}\left\{\begin{array}{l}
-(ff+hh)\,ddp\sin q\cos r + ll\,ddp\cos q + nn\,ddp\sin q\sin r \\
-(ff+hh)\,ddq\sin r - nn\,ddq\cos r - ll\,ddr - nn\,dp^2\sin q\cos q\cos r \\
+(ff-hh)\,dp^2\sin q\cos q\sin r + ll\,dp^2\sin q^2\sin r\cos r - mm\,dp^2(\cos q^2-\sin q^2\sin r^2) \\
- ll\,dq^2\sin r\cos r + mm\,dq^2\cos r^2 - mm\,dr^2 \\
- 2ff\,dp\,dq\cos q\cos r - 2ll\,dp\,dq\sin q\cos r^2 - 2mm\,dp\,dq\sin q\sin r\cos r \\
+ 2hh\,dp\,dr\sin q\sin r + 2mm\,dp\,dr\cos q + 2nn\,dp\,dr\sin q\cos r \\
- 2hh\,dq\,dr\cos r + 2nn\,dq\,dr\sin r
\end{array}\right.$$

III. Le moment autour de l'axe OT dans le sens MS

$$\frac{2M}{dt^2}\left\{\begin{array}{l}
+(ff+gg)\,ddp\sin q\sin r - mm\,ddp\cos q - nn\,ddp\sin q\cos r \\
-(ff+gg)\,ddq\cos r - nn\,ddq\sin r + mm\,ddr - nn\,dp^2\sin q\cos q\sin r \\
+(ff-gg)\,dp^2\sin q\cos q\cos r + mm\,dp^2\sin q^2\sin r\cos r - ll\,dp^2(\cos q^2-\sin q^2\cos r^2) \\
+ ll\,dq^2\cos r^2 - mm\,dq^2\sin r\cos r - ll\,dr^2 \\
+ 2ff\,dp\,dq\cos q\sin r + 2ll\,dp\,dq\sin q\sin r\cos r + 2mm\,dp\,dq\sin q\sin r^2 \\
+ 2ll\,dp\,dr\cos q + 2gg\,dp\,dr\sin q\cos r + 2nn\,dp\,dr\sin q\sin r \\
+ 2gg\,dq\,dr\sin r - 2nn\,dq\,dr\cos r
\end{array}\right.$$

Co-

Corollaire I.

26. Nous voyons donc, lorsque le mouvement du corps autour de son centre de gravité O est proposé, quels momens de forces sont requis pour entretenir le corps dans ce mouvement. Car la connoissance du mouvement nous donne à connoitre les quantités p, q, r, qui sont fonctions du tems t; & de la nature du corps même nous trouvons les quantités ff, gg, hh, ll, mm, & nn, indépendemment de son mouvement.

Corollaire II

27. Puisque la nature du centre de gravité n'est pas encore introduite dans le calcul, il est clair que les momens de forces trouvés peuvent être appliqués au mouvement de tous les corps qui tournent autour d'un point fixe, quoique ce ne soit point leur centre de gravité; pourvu que ce point demeure immobile.

Corollaire III,

28. Or si le point O est le centre de gravité du corps la nature du centre de gravité nous fournit ces formules

$$\int x\,dM = 0; \qquad \int y\,dM = 0; \qquad \& \quad \int z\,dM = 0,$$

Donc, comme ces formules n'entrent point dans les expressions que nous venons de trouver pour les moments des forces, il est clair que rien n'empêche, que le point immobile O autour duquel le corps tourne, ne soit pris hors du centre de gravité du corps.

Corollaire IV.

29. Aussitôt que le corps a quelque étendue, les quantités ff, gg, hh, auront des valeurs positives; qui ne sauroient jamais ni évanouir, ni devenir négatives. Or, pour les valeurs ll, mm, nn, elles peuvent bien selon la nature du corps, ou être affirmatives, ou évanouir, ou devenir négatives.

Remar-

Remarque I.

30. Ces expreſſions étant fort compliquées, il ſera à propos d'introduire, au lieu des trois variables p, q, r, trois autres qui en ſont déterminées, & par lesquelles nos expreſſions deviennent plus ſimples. Pour cet effet je poſe:

$$\begin{aligned} dp \sin q \cos r + dq \sin r &= P\,dt \\ dp \sin q \sin r - dq \cos r &= Q\,dt \\ dp \cos q - dr &= R\,dt \end{aligned}$$

& alors nous trouverons les expreſſions ſuivantes:

I. Le moment autour de l'axe OM dans le ſens ST

$$2M\left\{\begin{matrix} +gg\left(\frac{dR}{dt}+PQ\right)+hh\left(\frac{dR}{dt}-PQ\right) \\ -ll\left(\frac{dP}{dt}-QR\right)-mm\left(\frac{dQ}{dt}+PR\right)-nn(PP-QQ) \end{matrix}\right]$$

II. Le moment autour de l'axe OS dans le ſens MT:

$$2M\left\{\begin{matrix} -ff\left(\frac{dP}{dt}-QR\right)-hh\left(\frac{dP}{dt}+QR\right) \\ -ll\left(\frac{dR}{dt}+PQ\right)+mm(QQ-RR)+nn\left(\frac{dQ}{dt}-PR\right) \end{matrix}\right]$$

III. Le moment autour de l'axe OT dans le ſens MS

$$2M\left\{\begin{matrix} +ff\left(\frac{dQ}{dt}+PR\right)+gg\left(\frac{dQ}{dt}-PR\right) \\ +ll(PP-RR)-mm\left(\frac{dR}{dt}-PQ\right)-nn\left(\frac{dP}{dt}+QR\right) \end{matrix}\right]$$

Et partant, par le moyen de ces ſubſtitutions, en introduiſant les lettres P, Q, R, au lieu des p, q, r, nos formules deviennent non ſeule-

ment considérablement plus simples, mais on y remarque aussi une uniformité fort belle, par laquelle nous voyons que ces trois nouvelles quantités entrent également dans la détermination de nos trois moments. Cette régularité sert aussi de preuve pour justifier le calcul que je viens de déveloper.

Remarque II.

31. Je remarque de plus, que ces trois nouvelles quantités ont un fort beau rapport avec le rayon ON autour duquel le corps tourne à chaque instant, en sorte que ce rayon demeure immobile pendant cet instant. Car, posant pour la situation de ce rayon à l'égard du corps l'angle MON $= u$, & l'angle LMN $= v$, nous avons trouvé ci-dessus dans le second probleme

$$\sin(r-v) = \sin r \cos v - \cos r \sin v = \frac{dq}{\sqrt{(dp^2 \sin q^2 + dq^2)}} = \frac{dq}{dt\sqrt{(PP+QQ)}},$$

$$\cos(r-v) = \cos r \cos v + \sin r \sin v = \frac{dp \sin q}{\sqrt{(dp^2 \sin q^2 + dq^2)}} = \frac{dp \sin q}{dt\sqrt{(PP+QQ)}},$$

d'où nous tirons

$$\frac{P}{\sqrt{(PP+QQ)}} = \cos v, \quad \& \quad \frac{Q}{\sqrt{(PP+QQ)}} = \sin v,$$

Ensuite nous avions

$$\tang u = \frac{\sqrt{(dp^2 \sin q^2 + dq^2)}}{dp \cos q - dr} = \frac{\sqrt{(PP+QQ)}}{R},$$

Donc, connoissant les quantités P, Q, R, nous pourrons aisément assigner dans le corps le rayon ON, autour duquel le corps tourne à à chaque instant. Mais de plus, il sera aussi aisé de déterminer le mouvement de rotation, ou la vitesse angulaire avec laquelle le corps tourne autour de cet axe ON: car cette vitesse ayant été trouvée $= \frac{1}{dt}\sqrt{(dp^2 + dq^2 + dr^2 - 2\,dp\,dr \cos q}$, nous aurons

la vitesse de rotation $= \sqrt{(PP + QQ + RR)}$,

&

& c'eſt en quoi conſiſte une fort belle maniere de ſe former une idée diſtincte du mouvement du corps, après avoir trouvé les trois fonctions P, Q, R.

PROBLEME VII.

32. *Parmi tous les mouvemens dont le corps eſt ſuſceptible autour du point* O, *trouver les caracteres de ceux qui ſe font autour d'un axe immobile.*

SOLUTION.

Ayant trouvé le mouvement d'un corps propoſé autour du point O, par les fonctions du tems p, q, r, il n'eſt pas ſi aiſé de reconnoitre, ſi ce mouvement ſe fait autour d'un axe fixe ou non; car on en devroit chercher pour chaque moment le rayon autour duquel ſe fait la rotation, & voir ſi ce rayon demeure pour tout tems le même. Mais, ayant introduit les quantités P, Q, R, au lieu de p, q, r, ce jugement, ſi le mouvement ſe fait autour d'un axe immobile ou non? devient fort aiſé. Car on cherchera le rayon ON, autour duquel le corps tourne à chaque inſtant; qui étant déterminé à l'égard du corps par les angles MON $= u$, & LMN $= v$, il eſt clair que cet axe ON demeure immobile, lorsque ces deux angles u & v demeureront conſtans. Or nous avons trouvé,

$$\sin v = \frac{Q}{\sqrt{(PP + QQ)}}; \quad \cos v = \frac{P}{\sqrt{(PP + QQ)}},$$

$$\text{\& partant } \tang v = \frac{Q}{P}, \quad \text{\& de plus } \tang u = \frac{\sqrt{(PP + QQ)}}{R};$$

d'où l'on voit que l'axe de rotation demeurera toujours le même, lorsque les trois quantités P, Q, R, auront un rapport conſtant entr'elles: & c'eſt en quoi conſiſte le caractere du mouvement autour d'un axe immobile. Donc, pour cette eſpece de mouvement, nous aurons:

$$P = \alpha S; \quad Q = \beta S; \quad \& \quad R = \gamma S,$$

les

les lettres α, β, γ, marquant des quantités conftantes quelconques; car alors l'axe de rotation fixe ON fera déterminé en forte:

$$\text{tang}\, v = \text{tang}\, LMN = \frac{\beta}{\alpha};$$

$$\&\ \text{tang}\, u = \text{tang}\, MON = \frac{\sqrt{(\alpha\alpha + \beta\beta)}}{\gamma}.$$

De plus, la viteffe de rotation fera $= S\sqrt{(\alpha\alpha + \beta\beta + \gamma\gamma)}$: & partant, pour que le mouvement de rotation foit uniforme, il faut que la quantité S foit auffi conftante auquel cas les trois quantités P, Q, R, auront entr'elles non feulement des rapports conftans, mais elles feront auffi conftantes elles-mêmes.

Corollaire I.

33. Donc, après avoir déterminé le mouvement d'un corps autour du point fixe O, fi l'on trouve que les quantités P, Q, R, ont entr'elles des rapports conftans, ce fera une marque que le mouvement du corps fe fait autour d'un axe fixe; & quand ces mêmes quantités feront outre cela conftantes, le mouvement de rotation fera uniforme.

Corollaire II.

34. Les momens des forces requifes pour produire un tel mouvement de rotation, fe tireront aifément de nos formules générales, en pofant $P = \alpha S$, $Q = \beta S$, & $R = \gamma S$; car alors nous aurons:

I. Le moment autour de l'axe OM dans le fens ST

$$\frac{2M\,dS}{dt}(\gamma gg + \gamma hh - \alpha ll - \beta mm)$$

$$+ 2MSS(\alpha\beta gg - \alpha\beta hh + \beta\gamma ll - \alpha\gamma mm - (\alpha\alpha - \beta\beta)nn).$$

II. Le

II. Le moment autour de l'axe OS dans le ſens MT

$$\frac{2MdS}{dt}(-\alpha ff - \alpha hh + \gamma ll + \beta nn)$$
$$+ 2MSS(\beta\gamma ff - \beta\gamma hh + \alpha\beta ll + (\beta\beta - \gamma\gamma)mm - \alpha\gamma nn).$$

III. Le moment autour de l'axe OT dans le ſens MS

$$\frac{2MdS}{dt}(\beta ff + \beta gg - \gamma mm - \alpha nn)$$
$$+ 2MSS(\alpha\gamma ff - \alpha\gamma gg + (\alpha\alpha - \gamma\gamma)ll + \alpha\beta mm - \beta\gamma mn).$$

Corollaire III.

35. Or, quand nous avons $P = \alpha S$, $Q = \beta S$, $R = \gamma S$, quoique ce cas ſoit fort ſimple, il eſt pourtant difficile d'en tirer les valeurs des lettres p, q, r, qui déterminent le mouvement du point M, moyennant ces trois équations:

$$dp \sin q \cos r + dq \sin r = \alpha S dt,$$
$$dp \sin q \sin r + dq \cos r = \beta S dt,$$
$$dp \cos q - dr = \gamma S dt,$$

puisque les trois variables p, q, r, ſont tellement mêlées entr'elles, que leur réſolution demande une très grande adreſſe.

Corollaire IV.

36. Cependant, puisque le point N eſt immobile, qu'on poſe $CN = k$, & l'angle $CNM = \phi$; dont le différentiel étant égal au mouvement angulaire, nous aurons

$$d\phi = S dt \sqrt{(\alpha\alpha + \beta\beta + \gamma\gamma)}, \quad \& \quad \phi = \int S dt \sqrt{(\alpha\alpha + \beta\beta + \gamma\gamma)}.$$

Or, ayant trouvé cet angle ϕ, nous en obtiendrons

$$\cos CM = \cos q = \cos\phi \sin k \sin u + \cos k \cos u;$$

ou bien $\cos q = \dfrac{\cos\phi \sin k . \sqrt{(\alpha\alpha + \beta\beta)} + \gamma \cos k}{\sqrt{(\alpha\alpha + \beta\beta + \gamma\gamma)}}.$

COROLLAIRE V.

37. De plus, la résolution du même triangle CMN nous fournira

$$\text{tang}\, CMN = \text{tang}(r - v) = \frac{\cos k \sqrt{(\alpha\alpha + \beta\beta)} - \gamma \cos\phi \sin k}{\sin\phi \sin k},$$

& posant l'angle ACN $= \zeta$, qui est aussi constant:

$$\text{tang}\, MCN = \text{tang}(\zeta - p) = \frac{\gamma \sin k - \cos\phi \cos k \sqrt{(\alpha\alpha - \beta\beta)}}{\sin\phi \sqrt{(\alpha\alpha + \beta\beta)}}.$$

Et ainsi on obtiendra les valeurs des lettres p, q, r, vu que

$$\text{tang}\,(r - v) = \frac{\alpha \sin r - \beta \cos r}{\alpha \cos r - \beta \sin r}.$$

PROBLEME VIII.

38. *Trouver les forces requises, pour faire tourner un corps donné autour de l'axe* OM, *de sorte que cet axe demeure immobile, & que le mouvement soit uniforme.*

SOLUTION.

Puisque le corps est donné, on aura les valeurs ff, gg, hh, ll, mm, nn; & puisqu'on veut qu'il tourne autour de l'axe OM, nous n'avons qu'à mettre dans les formules du §. 34. l'angle $u = 0$, ou bien $\alpha = 0$, & $\beta = 0$; de plus, puisque le mouvement doit être uniforme, il y aura encore $dS = 0$, & S une quantité constante. Donc, pour que le corps puisse tourner d'un mouvement uniforme autour de l'axe OM, il faut qu'il soit sollicité par des forces, dont les momens sont:

I. par rapport à l'axe OM $= 0$,

II. par rapport à l'axe OS $= -2M\gamma\gamma mm SS$,

III. par rapport à l'axe OT $= -2M\gamma\gamma ll SS$,

où

où γS marque la viteſſe de rotation du corps autour de cet axe. Ou bien, ſi à la diſtance de l'axe $= a$, la viteſſe eſt due à la hauteur $= b$, la viteſſe de rotation ſera $= \frac{\gamma b}{a}$, qu'il faut écrire au lieu de γS, de ſorte que ces momens par rapport aux axes OS, & OT ſeront: $-\frac{2Mbmm}{aa}$, & $-\frac{2Mbll}{aa}$, qui ſont des produits du poids du corps M par des lignes droites, tout comme la nature des momens l'exige.

COROLLAIRE I.

39. Si la figure du corps eſt telle que $ll = o$, & $mm = o$, le corps pourra tourner autour de l'axe OM ſans le ſecours d'aucune force étrangere. Mais, quand ni $ll = o$, ni $mm = o$, il eſt impoſſible que ce mouvement ſubſiſte, ſans qu'il ſoit ſoutenu par des forces, dont les momens viennent d'être indiqués.

COROLLAIRE II.

40. Donc, pour que le corps puiſſe tourner autour de l'axe OM ſans aucun ſecours de dehors, la figure du corps doit être telle, que rapportant ſes élémens dM à trois coordonnées $OX = x$, $XY = y$, & $YZ = z$, il ſoit

$$\int xydM = o, \qquad \& \quad \int xydM = o.$$

COROLLAIRE III.

41. De même, afin que le corps puiſſe avoir un mouvement de rotation libre autour de l'axe OS, auquel les ordonnées y ſont paralleles, il faut qu'il ſoit $\int xydM = ll = o$, & $\int yzdM = nn = o$. Et pour qu'un tel mouvement autour de l'axe OT puiſſe ſubſiſter, il faut qu'il ſoit $\int xzdM = mm = o$, & $\int yzdM = nn = o$.

COROLLAIRE IV.

42. Or, afin que ce même corps puiſſe tourner librement autour d'un autre axe quelconque ON, dont le rapport aux trois axes

principaux OM, OS, OT, eſt donné par les lettres α, β, γ, il faut qu'il ſoit.

$$\alpha\beta(gg - hh) + \beta\gamma ll - \alpha\gamma mm - (\alpha\alpha - \beta\beta)nn = 0,$$
$$\beta\gamma(ff - hh) + \alpha\beta ll - \alpha\gamma nn + (\beta\beta - \gamma\gamma)mm = 0,$$
$$\alpha\gamma(ff - gg) + \alpha\beta mm - \beta\gamma nn + (\alpha\alpha - \gamma\gamma) ll = 0.$$

SCHOLIE.

43. A moins que le corps n'ait cette propriété, ou que les valeurs ff, gg, hh, ll, mm, nn, qui dépendent de la nature du corps ne ſatisfaſſent à ces trois équations, le corps ne ſauroit tourner librement autour de l'axe ON; mais il faut que le corps ſoit ſollicité par quelques forces, qui ayent les momens marqués ci-deſſus. Ces forces ſerviront à maintenir l'axe en repos, contre les forces centrifuges des parties du corps, qui ne ſe contrebalancent pas dans ces cas. On voit donc qu'il peut y avoir une infinité d'axes, dans le même corps, tous tirés par ſon centre de gravité, autour deſquels le corps ne ſauroit tourner librement. Cependant il y a toujours au moins un d'entre ſes axes, autour duquel ſe peut faire librement une rotation, ce que je m'en vais prouver dans le Théoreme ſuivant.

THÉOREME.

44. De quelque figure que ſoit le corps, on y peut toujours aſſigner un tel axe, qui paſſe par ſon centre de gravité, autour duquel le corps peut tourner librement & d'un mouvement uniforme.

DÉMONSTRATION.

Puiſque le corps eſt ſuppoſé quelconque, que les quantités qui en dépendent, ff, gg, hh, ll, mm, nn, ayent des valeurs quelconques; & il faut prouver, qu'il eſt toujours poſſible de déterminer en ſorte les lettres α, β, γ, que les expreſſions des trois momens marqués dans le §. 34. évanouiſſent. Car, poſant chacun de ces trois momens $= 0$, nous aurons trois équations, deſquelles je remarque

que d'abord, que si l'on multiplie la premiere par γ, la seconde par $-\alpha$, & la troisieme par β, leur somme donnera:

$$\frac{2M\,dS}{dt}((\alpha\alpha+\beta\beta)ff+(\beta\beta+\gamma\gamma)gg+(\alpha\alpha+\gamma\gamma)hh-2\alpha\beta nn-2\beta\gamma mm-2\alpha\gamma ll)=0,$$

d'où l'on aura $dS=0$, & partant le mouvement du corps sera uniforme. Donc, pour trouver les valeurs des lettres α, β, γ, il faut résoudre les trois équations suivantes:

$$\alpha\beta(gg-hh)-\alpha\gamma mm+\beta\gamma ll-\alpha\alpha nn+\beta\beta nn=0,$$
$$\alpha\beta ll-\alpha\gamma nn+\beta\gamma(ff-hh)+\beta\beta mm-\gamma\gamma mm=0,$$
$$\alpha\beta mm+\alpha\gamma(ff-gg)-\beta\gamma nn+\alpha\alpha ll-\gamma\gamma ll=0.$$

Or ces trois équations sont telles, que quand on aura satisfait à deux, la troisieme sera en même tems résolue. Car la premiere étant multipliée par γ, la seconde par $-\alpha$, la troisieme par β, leur somme évanouït d'elle même: de sorte que chacune de ces trois équations est déjà comprise dans les deux autres. Donc, il suffira de résoudre deux de ces équations: pour cet effet éliminons la valeur de γ qui se trouve de la premiere équation:

$$\gamma=\frac{\alpha\beta(gg-hh)-\alpha\alpha nn+\beta\beta nn}{\alpha mm-\beta ll},$$

cette valeur étant substituée dans l'une des deux autres équations, donnera:

$$+\alpha^3(llm^4-lln^4-mmnn(ff-gg))$$
$$+\alpha^2\beta(m^6-2l^4mm+mmn^4+llnn(ff+gg-2hh)+mm(ff-gg)(gg-hh))$$
$$+\alpha\beta^2(l^6-2llm^4+lln^4+mmnn(ff-2gg+hh)-ll(ff-hh)(gg-hh)$$
$$+\beta^3(l^4mm-mmn^4-llnn(ff-hh)=0.$$

De cette équation on trouvera le rapport entre α & β ou $\frac{\beta}{\alpha}=\text{tang}\,v$, & puisqu'elle est cubique, elle aura au moins une racine réelle, & de

là on aura aussi le rapport de γ à α & β, & partant tang $u = \frac{\sqrt{(\alpha\alpha + \beta\beta)}}{\gamma}$.

Il est donc certain qu'il y a toujours en chaque corps au moins un tel axe de libre rotation, & quand les trois racines de l'équation cubique sont réelles, on aura trois tels axes. Mais il y a aussi des cas, où une infinité de tels axes a lieu; ce qui arrive lorsqu'une des trois lettres α, β, γ, demeure indéterminée, ou même toutes les trois, savoir si $ff = gg = hh$, & $ll = mm = nn = 0$.

PROBLEME IX.

45. *Déterminer tous les mouvemens autour du centre de gravité O, dont un corps est susceptible, lorsqu'il n'est sollicité par aucune force étrangere: supposant le corps tel qu'il y ait* $ll = 0$, $mm = 0$, *&* $nn = 0$.

SOLUTION.

Puisque le corps n'est sollicité par aucune force, il faut que les momens requis pour maintenir son mouvement, deviennent $= 0$; de là nous obtiendrons trois équations

$$(gg + hh)\,dR + (gg - hh)\,PQ\,dt = 0,$$
$$(ff + hh)\,dP + (hh - ff)\,QR\,dt = 0,$$
$$(ff + gg)\,dQ + (ff - gg)\,PR\,dt = 0,$$

où les quantités ff, gg, & hh, sont connues par la nature du corps; & c'est de ces trois équations qu'il faut chercher les trois quantités P, Q, R, d'où l'on connoitra le mouvement du corps. Or, posons pour abréger:

$$\frac{gg - hh}{gg + hh} = \mu; \quad \frac{hh - ff}{hh + ff} = \nu; \quad \& \quad \frac{ff - gg}{ff + gg} = \lambda;$$

& nous aurons:

$$\text{I.} \quad dR + \mu PQ\,dt = 0;$$
$$\text{II.} \quad dP + \nu QR\,dt = 0;$$
$$\text{III.} \quad dQ + \lambda PR\,dt = 0.$$

Mul-

Multiplions la premiere par νR, & la seconde par μP, ensuite la seconde par λP, & la troisieme par νQ, pour obtenir ces deux équations:

$$\nu R dR = \mu P dP, \quad \& \quad \nu Q dQ = \lambda P dP,$$

d'où nous tirons:

$$RR = \frac{\mu}{\nu}(A + PP), \quad \& \quad QQ = \frac{\lambda}{\nu}(B + PP),$$

$$\text{donc } QR = \sqrt{\frac{\lambda\mu}{\nu\nu}(A + PP)(B + PP)}.$$

Or la premiere équation étant $\nu R dR + \mu\nu PQR dt = 0$, à cause de $\nu R dR = \mu P dP$, se change en $dP + \nu QR dt = 0$, d'où nous arrivons à cette équation séparée:

$$dt = \frac{-dP}{\sqrt{\lambda\mu(A + PP)(B + PP)}},$$

dont l'intégrale marquera à chaque tems écoulé t la valeur de P, & de là on aura aussi

$$Q = \sqrt{\frac{\lambda}{\nu}(B + PP)}, \quad \& \quad R = \sqrt{\frac{\mu}{\nu}(A + PP)},$$

Par là on connoitra à chaque instant l'axe de rotation du corps, autour duquel la vitesse de rotation sera

$$\sqrt{(PP + QQ + RR)} = \sqrt{\frac{\mu A + \lambda B + (\lambda + \mu + \nu)PP}{\nu}},$$

or $\lambda + \mu + \nu = -\lambda\mu\nu$, de sorte que la vitesse de rotation sera $= \sqrt{\left(\frac{\mu A + \lambda B}{\nu} - \lambda\mu PP\right)}$.

COROLLAIRE I.

46. Considérant les valeurs des lettres λ, μ, ν, il est clair qu'il ne peut pas arriver, que toutes les trois ayent des valeurs affirmatives, mais il y en aura toujours ou une ou deux négatives. Ainsi, de

de ces deux fractions $\frac{\lambda}{\nu}$, & $\frac{\mu}{\nu}$, ou l'une ou toutes les deux seront nécessairement négatives. Par conséquent, on ne sauroit supposer à la fois & A $=$ o, & B $=$ o, à moins qu'il ne soit P $=$ o, & alors le corps sera en repos.

Corollaire II.

47. Donc, puisque la formule différentielle n'est pas intégrable en général, si nous voulons considérer des cas où elle admet l'intégration, il faut commencer par poser la constante B $=$ o, supposant que $\frac{\lambda}{\nu}$ soit une quantité positive. Soit donc $\frac{\lambda}{\nu} = \alpha\alpha$, & $\frac{\mu}{\nu} = -\beta\beta$; & $A = -aa$, pour avoir $Q = \alpha P$; $R = \beta\sqrt{(aa - PP)}$, & $dt = \frac{-dP}{\nu\alpha\beta P\sqrt{(aa - PP)}}$, dont l'intégrale est $\nu\alpha\beta t = \frac{1}{a}\, l\frac{a + \sqrt{(aa - PP)}}{P}$. Que e marque le nombre dont le logarithme $=$ 1, & soit $Ce^{\nu\alpha\beta at} = T$, ou bien soit $\nu\alpha\beta a = c$, & partant

$$a = \frac{c}{\sqrt{-\lambda\mu}} = \frac{c\sqrt{(ff + gg)(gg + hh)}}{\sqrt{(ff - gg)(gg - hh)}}.$$

Ayant donc $PT = a + \sqrt{(aa - PP)}$, nous obtiendrons $P = \frac{2aT}{1 + TT}$, & $\sqrt{(aa - PP)} = \frac{a(TT - 1)}{1 + TT}$: & partant $Q = \frac{2\alpha aT}{1 + TT}$, & $R = \frac{\beta a(TT - 1)}{1 + TT}$. Or la vitesse de rotation sera $= \frac{a}{1+TT}\sqrt{(\beta\beta(TT - 1)^2 + 4(1 + \alpha\alpha)TT)}$.

Co-

Corollaire III.

48. Puisque $T = Ce^{ct}$, je remarque d'abord, qu'après quelque tems la valeur de T devient ou fort grande ou fort petite; selon que c a une valeur positive ou négative. Donc il ne durera gueres longtems depuis le commencement du mouvement, qu'il ne devienne fort à peu près $P = 0$, & $Q = 0$, ce qui est le cas où le corps tournera librement autour de l'axe OM.

Remarque.

49. Voilà une circonstance très remarquable, que dans ce cas le corps, après avoir commencé à tourner sur un axe mobile, change bientôt tellement ce mouvement vague, qu'il approche de plus en plus du mouvement autour d'un axe fixe. Et quoique cela ne se trouve que dans le cas que je viens de considérer, cette circonstance est si singuliere, qu'il n'y a presque aucun doute qu'elle ne soit beaucoup plus générale: de sorte que, quelque irrégulier puisse être le mouvement qu'on aura imprimé à un corps quelconque, l'irrégularité en disparoitra fort souvent peu à peu, & le corps s'accommodera enfin à tourner autour d'un axe fixe, avec un mouvement uniforme. Or je viens de démontrer, que, quelque irréguliere que soit la figure du corps, il y a toujours au moins un axe autour duquel le corps puisse tourner librement. Au reste la condition du probleme, que $ll = \infty$, $mm = 0$, $nn = 0$, renferme tous les corps dont le point O est en même tems le centre de gravité & le centre de figure ou de grandeur: mais comme ce cas n'a point admis l'intégration en général, je m'en vais y ajouter encore une condition, qui est que $gg = hh$, & qui ne laisse pas de comprendre une infinité de corps, comme tous les sphéroïdes tant allongés qu'applatis, avec une infinité d'autres, qui ont en O tant leur centre de gravité que celui de figure; mais l'égalité $gg = hh$ exige, que le corps ait des parties égales & semblables selon deux dimensions.

 PROBLE-

PROBLEME X.

50. *Déterminer tous les mouvemens dont les corps sphéroïdiques, tant allongés qu'applatis, sont susceptibles, tandisqu'ils ne sont assujettis à aucune force étrangere.*

SOLUTION.

Soit OM l'axe véritable du sphéroïde, & les deux autres OS, & OT, soient égaux entr'eux, ou qu'ils fournissent au moins deux valeurs égales pour les quantités gg & hh. Et puisque de tous ces corps le point O est le centre de gravité & celui de grandeur, les quantités ll, mm, nn, évanouiront. Cela remarqué, posant $hh = gg$, nous aurons, pour tous les mouvemens dont ces corps sont susceptibles, les trois équations suivantes:

I. $dR = 0$,

II. $(ff + gg)\,dP - (ff - gg)QR\,dt = 0$,

III. $(ff + gg)\,dQ + (ff - gg)PR\,dt = 0$.

Nous en tirons donc d'abord $R = A$, marquant par A une quantité constante quelconque. Depuis posant pour abréger $\frac{ff - gg}{ff + gg} = \lambda$, où λ sera une quantité ou positive ou négative selon que $ff > gg$, ou $ff < gg$, les deux autres équations à résoudre seront:

$$dP - \lambda AQ\,dt = 0, \quad \& \quad dQ + \lambda AP\,dt = 0,$$

qui donnent $P\,dP + Q\,dQ = 0$, & partant:

$$PP + QQ = aa.$$

Donc, puisque $Q = \sqrt{(aa - PP)}$, nous aurons

$$\frac{dP}{\sqrt{(aa - PP)}} = \lambda A\,dt,$$

& partant $A \sin \frac{P}{a} = \lambda At + \alpha$, ou $P = a \sin(\lambda At + \alpha)$,

&

& $Q = a\,\mathrm{cos}(\lambda A t + \alpha)$. Donc, après le tems t, le corps tournera autour de l'axe ON, de forte que

$$\mathrm{tang}\,LMN = \mathrm{tang}\,v = \mathrm{cot}\,(\lambda A t + \alpha), \quad \&$$
$$\mathrm{tang}\,MON = \mathrm{tang}\,u = \frac{a}{A}:$$

Par conféquent l'axe de rotation ON quoique variable fera toujours avec l'axe du corps OM un angle conftant MON; qui étant pofé $= \zeta$, nous aurons $A = \frac{a}{\mathrm{tang}\,\zeta}$, & enfuite l'angle LMN fera $= C - \frac{\lambda a t}{\mathrm{tang}\,\zeta}$, de forte que les changemens de cet angle feront proportionels au tems. Enfuite nous aurons:

$$P = a\,\mathrm{cos}\left(C - \frac{\lambda a t}{\mathrm{tang}\,\zeta}\right), \quad Q = \mathrm{fin}\left(C - \frac{\lambda a t}{\mathrm{tang}\,\zeta}\right),$$
$$\& \quad R = \frac{a}{\mathrm{tang}\,\zeta},$$

& la viteffe de rotation autour de cet axe mobile ON fera $= \sqrt{(PP + QQ + RR)} = \frac{a}{\mathrm{fin}\,\zeta}$, & partant conftante. Soit ε cette viteffe de rotation, ou $a = \varepsilon\,\mathrm{fin}\,\zeta$, & nous aurons

$$P = \varepsilon\,\mathrm{fin}\,\zeta\,\mathrm{cos}\,(C - \lambda\varepsilon t\,\mathrm{cos}\,\zeta),$$
$$Q = \varepsilon\,\mathrm{fin}\,\zeta\,\mathrm{fin}\,(C - \lambda\varepsilon t\,\mathrm{cos}\,\zeta), \quad \&$$
$$R = \varepsilon\,\mathrm{cos}\,\zeta.$$

Ayant trouvé les valeurs des lettres P, Q, R, le mouvement du point M, avec celui du premier méridien du corps LM, fera déterminé par les équations fuivantes:

$$dp\,\mathrm{fin}\,q\,\mathrm{cos}\,r + dq\,\mathrm{fin}\,r = \varepsilon dt\,\mathrm{fin}\,\zeta\,\mathrm{cos}\,(C - \lambda\varepsilon t\,\mathrm{cos}\,\zeta)$$
$$dp\,\mathrm{fin}\,q\,\mathrm{fin}\,r - dq\,\mathrm{cos}\,r = \varepsilon dt\,\mathrm{fin}\,\zeta\,\mathrm{cos}\,(C - \lambda\varepsilon t\,\mathrm{cos}\,\zeta)$$
$$dp\,\mathrm{cos}\,q - dr = \varepsilon dt\,\mathrm{cos}\,\zeta.$$

 Or

Or la résolution de ces équations est extrêmement difficile, & je ne vois pas encore, comment on y pourroit parvenir. Cependant on voit que ce mouvement n'est pas irrégulier en lui-même, vu que l'axe de rotation ON se meut d'un mouvement uniforme autour de l'axe principal OM, & que le mouvement de rotation du corps autour de cet axe ON est uniforme.

Corollaire I.

51. Donc, lorsqu'on aura imprimé à un tel corps un mouvement de rotation dont la vitesse soit $= \varepsilon$, autour d'un axe oblique ON, qui fasse avec l'axe principal un angle MON $= \zeta$, le corps ne pourra pas continuer ce mouvement, mais son axe de rotation changera continuellement, de sorte pourtant que l'angle demeure toujours le même.

Corollaire II.

52. Puisque l'angle LMN qui marque à chaque tems l'axe de rotation est $= v = C - \lambda \varepsilon t \cos \zeta$, la vitesse de ce changement sera $= - \lambda \varepsilon \cos \zeta$. Donc ce changement d'axe de rotation évanouira lorsque $\lambda = 0$, c. à d. lorsque $ff = gg = hh$. Donc, dans ce cas, le corps peut tourner librement autour de tout axe ON, autour duquel il aura été mis une fois en mouvement.

Corollaire III.

53. Or, puisque $\lambda \varepsilon \cos \zeta$ marque la vitesse du changement de l'angle LMN, la vitesse du changement du point N ou de l'axe ON même, sera d'autant plus grande que le point N sera plus éloigné de l'axe OM. Donc la vraye vitesse du changement de l'axe de rotation sera $= - \lambda \varepsilon \cos \zeta \sin \zeta$, d'où l'on voit, que l'axe de rotation demeurera immobile, tant dans le cas où l'angle MON évanouit, que dans le cas ou cet angle est droit.

Remarque.

54. Or si nous considérons, que la distance MN $= \zeta$, demeure toujours la même, & que tant le mouvement du point M autour

autour de N, que celui du point N, eſt uniforme, nous en concluons aiſément que le point M ſe meut autour d'un axe fixe dans le Ciel. Donc, ſi nous prenons OC pour cet axe fixe, l'arc $CM = q$ ſera conſtant, & partant $dq = 0$, d'où la réſolution de nos équations, en diviſant l'une par l'autre,

$$\frac{\operatorname{cof} r}{\operatorname{fin} r} = \frac{\operatorname{cof}(C - \lambda \varepsilon t \operatorname{cof} \zeta)}{\operatorname{fin}(C - \lambda \varepsilon t \operatorname{cof} \zeta)},$$

& partant $r = CML = C - \lambda \varepsilon t \operatorname{cof} \zeta$. De plus, nous aurons $dp = \frac{\varepsilon dt \operatorname{fin} \zeta}{\operatorname{fin} q}$, & ces valeurs étant ſubſtituées dans la troiſieme équation donnent

$$\frac{\varepsilon dt \operatorname{fin} \zeta \operatorname{cof} q}{\operatorname{fin} q} + \lambda \varepsilon dt \operatorname{cof} \zeta = \varepsilon dt \operatorname{cof} \zeta,$$

& partant

$$\operatorname{tang} q = \frac{\operatorname{fin} \zeta}{(1 - \lambda) \operatorname{cof} \zeta} = \frac{\operatorname{tang} \zeta}{1 - \lambda} = \frac{ff + gg}{2gg} \operatorname{tang} \zeta.$$

Donc le mouvement du ſphéroïde propoſé ſera tel, que ſon axe OM, ou bien ſon pole M, ſe meut uniformement autour du point fixe dans le Ciel C, qui en eſt éloigné à une diſtance $CM = q$, de ſorte que $\operatorname{tang} q = \frac{ff + gg}{2gg} \operatorname{tang} \zeta$; & la viteſſe de cette rotation ſera $= \frac{dp}{dt} = \frac{\varepsilon \operatorname{fin} \zeta}{\operatorname{fin} q}$ dans le ſens AP: cette viteſſe ſera donc $= \frac{\varepsilon \surd (4g^4 \operatorname{cof} \zeta^2 + (ff + gg)^2 \operatorname{fin} \zeta^2)}{ff + gg}$. Ou, bien ſi nous voulons regarder l'arc $CM = q$ comme connu, nous aurons $\operatorname{tang} \zeta = \frac{2gg}{ff + gg} \operatorname{tang} q$, & $\operatorname{fin} \zeta = \frac{2gg \operatorname{fin} q}{\surd (4g^4 \operatorname{fin} q^2 + (ff + gg)^2 \operatorname{cof} q^2)}$, & $\operatorname{cof} \zeta = \frac{(ff + gg) \operatorname{cof} q}{\surd (4g^4 \operatorname{fin} q^2 + (ff + gg)^2 \operatorname{cof} q^2)}$, & la viteſſe de rotation du

du pole M autour du point C sera $= \frac{-2\epsilon gg}{\sqrt{(4g^4 \sin q^2 + (ff+gg)^2 \cos q^2)}}$. Ensuite, puisque $dr = -\lambda \epsilon dt \cos \zeta$, le premier méridien du corps MS tournera cependant autour de l'axe OM dans le sens ST avec une vitesse de rotation $= \frac{dr}{dt} = \lambda \epsilon \cos \zeta = \frac{\epsilon (ff - gg) \cos q}{\sqrt{(4g^4 \sin q^2 + (ff + gg)^2 \cos q^2)}}$. Le mouvement de ce corps sera donc semblable à celui de la terre, si nous faisons abstraction de la nutation de la terre: car, regardant le point C comme le pole de l'écliptique, le mouvement de notre corps sera tel, que premierement son axe OM tourne d'un mouvement uniforme autour du pole de l'écliptique C, la distance CM étant constante $= q$, & la vitesse de rotation dans le sens AP $= \frac{2\epsilon gg}{\sqrt{(4g^4 \sin q^2 + (ff + gg)^2 \cos q^2}}$. Ensuite, le corps lui-même tournera autour de son axe OM dans le sens ST avec une vitesse de rotation $= \frac{\epsilon (ff - gg) \cos q}{\sqrt{(4g^4 \sin q^2 + (ff + gg)^2 \cos q^2)}}$, & les deux mouvemens se feront en même sens, lorsque $ff > gg$, c'est à dire lorsque le sphéroïde sera allongé, & le contraire arrivera, lorsqu'il sera applati. Cependant on ne sauroit soutenir que le mouvement de la terre soit conforme avec ces formules; car, si le corps est supposé à peu près sphérique, ou ff presque égal à gg, le mouvement du corps autour de son axe OM, qui devroit répondre au mouvement diurne de la terre, devient extrèmement lent, & l'autre, qui représente la précession des équinoxes, demeure très rapide. Donc, puisque ce mouvement est si différent de celui de la terre, il est évident que la précession des équinoxes est causée par quelque force étrangere, laquelle est sans contredit la force attractive de la lune.

PRO-

PROBLEME GÉNÉRAL.

55. *Un corps solide étant à chaque instant sollicité par des forces quelconques, déterminer le mouvement qu'il poursuivra, après qu'on lui aura imprimé un mouvement quelconque.*

SOLUTION.

Qu'on considere d'abord le mouvement du centre de gravité du corps, & concevant que toute sa masse y soit réunie, qu'on y applique à chaque instant les forces qui agissent sur le corps; & en suivant les regles de la Mécanique, on déterminera le mouvement progressif, ou celui du centre de gravité du corps. Or, pour trouver le mouvement de rotation du corps, on concevra son centre de gravité comme demeurant en repos, & on cherchera le mouvement, qu'il auroit alors; & en combinant ces deux mouvemens, le progressif & celui de rotation ensemble, on aura le mouvement entier du corps. Mais, pour trouver le mouvement de rotation, on procédera de la maniere suivante.

I. On choisira à volonté dans le corps trois axes OM, OS, & OT, qui se croisent ensemble dans son centre de gravité O à angles droits: ensuite on rapportera chaque élément du corps Z à ces trois axes par les trois coordonnées OX, XY, & YZ, paralleles aux axes. Depuis, posant l'élément du corps situé en Z $= dM$, & les trois coordonnées Fig. 5.

$$OX = x, \qquad XY = y, \qquad \& \quad YZ = z,$$

qu'on cherche pour le corps entier les intégrales suivantes

$$\int xx\,dM, \quad \int yy\,dM, \quad \int zz\,dM,$$
$$\int xy\,dM, \quad \int xz\,dM, \quad \int yz\,dM,$$

& nommant la masse du corps entier $= M$, soient les valeurs de ces intégrales:

$$\int xx\,dM = Mff, \qquad \int xy\,dM = Mll,$$
$$\int yy\,dM = Mgg, \qquad \int xz\,dM = Mmm,$$
$$\int zz\,dM = Mhh, \qquad \int yz\,dM = Mnn,$$

II.

II. Pour les forces dont le corps est sollicité à chaque instant, puisqu'elles sont connues, qu'on cherche leurs momens par rapport à chacun des trois axes, & soit, après le tems écoulé $= t$,

Le moment des forces autour
de l'axe OM dans le sens ST $=$ X.

Le moment de forces autour
de l'axe OS dans le sens TM $=$ Y.

Le moment des forces autour
de l'axe OT dans le sens MS $=$ Z.

Depuis il faut chercher les trois quantités P, Q, & R, par les trois équations suivantes:

$$\frac{Xdt}{2M} = \begin{cases} (gg+hh)dR + (gg-hh)PQdt \\ -lldP - mmdQ + llQRdt - mmPRdt - nnPPdt + nnQdt, \end{cases}$$

$$\frac{Ydt}{2M} = \begin{cases} (hh+ff)dP + (hh-ff)QRdt \\ -nndQ - lldR + nnPRdt - llPQdt - mmQQdt + mmRRdt, \end{cases}$$

$$\frac{Zdt}{2M} = \begin{cases} (ff+gg)dQ + (ff-gg)PRdt \\ -mmdR - nndP + mmPQdt - nnQRdt - llRRdt + llPPdt, \end{cases}$$

Fig. 4. III. Ensuite on rapportera le corps à l'espace absolu, à la sphere celeste ACB, dont le centre O soit occupé par le centre de gravité du corps, & que les trois axes du corps OM, OS, OT, tiennent dans l'instant présent la situation marquée dans la figure: & je dis que dans cet instant le corps tournera autour de l'axe ON, dont la position à l'égard des trois axes du corps sera déterminée en sorte

$$\text{tang } SMN = \frac{Q}{P}, \quad \& \text{ tang } MON = \frac{\sqrt{(PP+QQ)}}{R},$$

ou bien la ligne ON sera tellement inclinée aux trois axes que

II tang

$$\text{tang MON} = \frac{\sqrt{(PP+QQ)}}{R}, \quad \text{tang SON} = \frac{\sqrt{(QQ+RR)}}{P};$$

$$\text{tang TON} = \frac{\sqrt{(RR+PP)}}{Q},$$

& la viteſſe de rotation autour de cet axe ON ſera =

$$\sqrt{(PP + QQ + RR)}.$$

IV. Or cela ne ſuffit pas encore pour connoitre le vrai mouvement du corps, il faut ſavoir à quels points répondent les trois axes du corps dans le Ciel. Soit donc l'angle ACM $= p$, l'arc CM $= q$, & l'angle CMS $= r$; & il eſt clair que, connoiſſant ces trois quantités p, q, & r, on ſera en état de déterminer la vraye ſituation du corps à l'égard de l'eſpace abſolu. Or il faut tirer les valeurs de ces quantités des trois formules ſuivantes:

$$dp \sin q \cos r + dq \sin r = P dt$$

$$dp \sin q \sin r - dq \cos r = Q dt$$

$$dp \cos q - dr = R dt.$$

Voilà donc toute la ſolution du probleme réduite à des équations purement analytiques, auxquelles on doit borner la recherche, puisque leur réſolution ſemble ſurpaſſer les bornes de nos lumieres dans l'Analyſe.

Corollaire I.

56. Quelque difficile que ſoit la réſolution des formules dans N°. II. & N°. IV. il eſt remarquable que celles de N°. II. en multipliant la premiere par R, la ſeconde par P, & la troiſieme par Q, produiſent une ſomme intégrable qui eſt:

$$\frac{P}{M}(\int RX dt + \int PY dt + \int QZ dt) =$$

$$(gg + hh)RR + (hh + ff)PP + (ff + gg)QQ$$

$$- 2ll PR - 2mm QR - 2nn PQ,$$

qui renferme la conſervation des forces vives.

Co-

COROLLAIRE II.

57. On peut encore trouver une autre équation intégrale des formules N°. II. Car multipliant

la premiere par $ffR + llP + mmQ$,
la seconde par $ggP + nnQ + llR$,
la troisieme par $hhQ + mmR + nnP$,

l'intégrale de la somme sera:

$$\frac{1}{M}(ff\int RXdt + gg\int PYdt + hh\int QZdt +$$

$$\frac{1}{M}(ll\int(PX+RY)dt - mm\int(QX+RZ)dt + nn\int(QY+PZ)dt) =$$

$$ff(gg+hh)RR + gg(hh+ff)PP + hh(ff+gg)QQ$$
$$+ 2hhllPR + 2ffnnPQ + 2ggmmQR.$$

COROLLAIRE III.

58. Donc, si le corps n'est sollicité par aucune force, on a d'abord pour N°. II. deux équations intégrales: savoir

$$\left.\begin{matrix}(gg+hh)RR + (hh+ff)PP + (ff+gg)QQ \\ -2llPR - 2nnPQ - 2mmQR\end{matrix}\right\} = C,$$

$$\left.\begin{matrix}ff(gg+hh)RR + gg(hh+ff)PP + hh(ff+gg)QQ \\ +2hhllPR + 2ffnnPQ + 2ggmmQR\end{matrix}\right\} = D.$$

Remarque.

59. Cette résolution du probleme, que je viens de déveloper, est sans contredit plus simple que celle que j'en ai donnée autrefois, vu que les formules qui contiennent la solution, sont moins embarrassées. Mais le plus grand avantage consiste en ce que cette solution est beaucoup plus propre à être appliquée à tous les cas qu'on puisse proposer. La raison en est évidente, parce que j'ai réduit ici

le

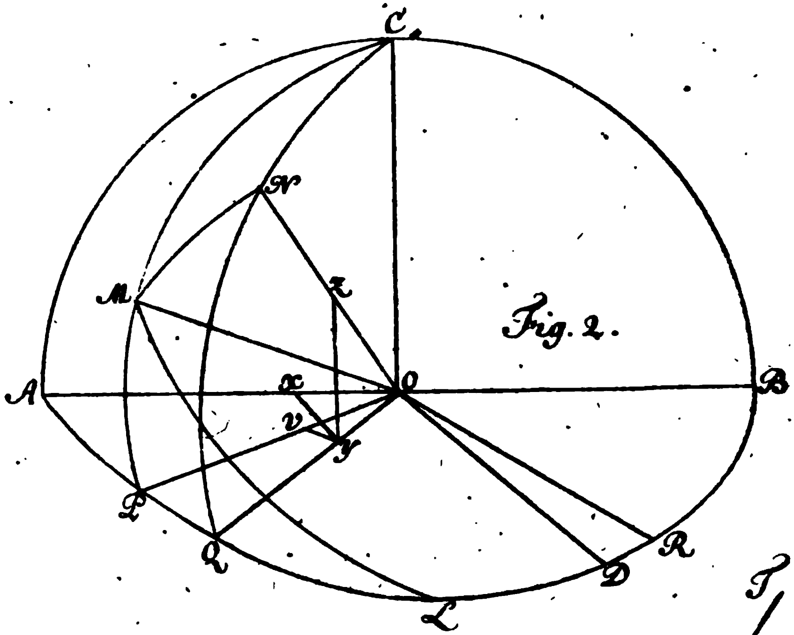


Fig. 2.

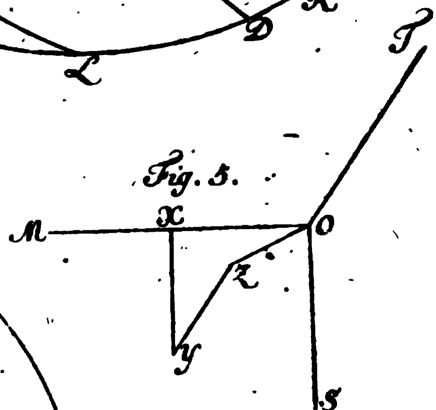
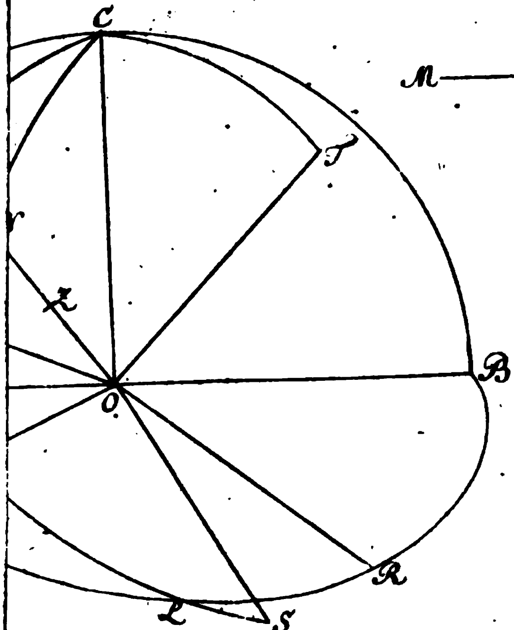


Fig. 5.



d. 1760. Pl. 5. pag. 227.

le calcul des élémens qui dépendent de la figure du corps, à des axes qui ſont fixes dans le corps, de ſorte que ces élémens demeurent toujours les mêmes; au lieu que la premiere ſolution exige pour chaque ſituation différente une nouvelle recherche de ces élémens, puisqu'ils étoient rapportés à des axes fixes dans l'eſpace abſolu, à l'égard desquels la poſition du corps peut changer à tous momens. Cependant, quoique cette ſolution ſoit complette, il s'en faut encore beaucoup qu'elle ſoit déjà aſſez développée: le plus ſeur moyen de porter cette matiere à un plus haut degré d'évidence ſera ſans doute d'en faire l'application à des cas déterminés, & auſſi ſimples qu'il ſera poſſible; car alors on ne manquera pas de découvrir des artifices pour la réſolution de ces formules, lesquels, quoiqu'ils paroiſſent particuliers aux cas qu'on traite, conduiront néanmoins à une plus grande généralité. Puisque donc le mouvement de cette eſpece étoit encore la ſeule choſe qui manquoit dans la Théorie des corps ſolides, je me flatte de l'avoir portée à un tel degré de connoiſſance, qu'on ſera en état d'aſſujettir au calcul tous ces mouvemens compliqués, avec la même addreſſe dont on a uſé jusqu'ici à l'égard des mouvemens ſimples.

PROBLEME.

UN CORPS ÉTANT ATTIRÉ EN RAISON RÉCIPROQUE QUARRÉE DES DISTANCES VERS DEUX POINTS FIXES DONNÉS, TROUVER LES CAS OÙ LA COURBE DÉCRITE PAR CE CORPS SERA ALGÉBRIQUE,

RÉSOLU PAR M. EULER.

Voilà un probleme qui paroit aussi important que difficile. On convient aujourd'hui, que l'Astronomie seroit portée au plus haut degré de perfection, si l'on trouvoit moyen de déterminer le mouvement de trois corps, qui s'attirent mutuellement en raison réciproque quarrée des distances. Mais tous les soins que les Géometres ont apportés jusqu'ici pour cet effet ont été inutiles; ils y ont rencontré du côté de l'Analyse des obstacles invincibles, malgré les grands progrès qu'on a déjà faits dans cette étude. Donc tous les pas qu'on puisse faire pour approcher de ce grand but, seront très importans. C'est dans cette vue, que je me suis appliqué à la question, où deux corps étant supposés fixes, on demande le mouvement d'un troisieme, qui y seroit attiré suivant la loi mentionnée. Je crois que tous ceux, qui voudront entreprendre la solution de ce probleme, y trouveront des difficultés, qui leur paroitront presque aussi insurmontables, que dans le grand probleme fondamental de l'Astronomie. Du moins, tant qu'on ne sauroit surmonter ces moindres difficultés, on espéreroit en vain de surmonter les plus grandes. Or c'est après bien des essais inutiles, que je suis enfin parvenu à la solution de ce dernier probleme par un hazard occasionné par une erreur singuliere qui m'y a conduit. Ayant trouvé cette solution j'ai remarqué, que parmi

parmi l'infinie variété des courbes, que le corps attiré vers deux centres fixes peut décrire, selon la vitesse & direction qui lui aura été imprimée au commencement; il y a des courbes algébriques, dont la recherche demandant une addresse tout nouvelle de l'Analyse, me paroit à tous égards digne de l'attention des Géometres, & c'est le sujet du probléme que je me propose de traiter.

Pour y réussir il faut expédier les articles suivans:

Premierement, il faut chercher les formules différentio-différentielles, qui renferment en général la détermination du mouvement du corps.

En second lieu, il faut intégrer ces formules pour avoir des équations différentielles du premier degré, qui contiennent les loix du mouvement.

En troisieme lieu, il faut ramener ces équations à la séparation des variables, pour construire le probleme par des quadratures.

En quatrieme lieu enfin, il s'agit de déterminer les cas, où la courbe décrite devient algébrique.

Ces quatre articles, dont je déveloperai chacun séparément, meneront à la solution du probleme proposé.

PREMIER ARTICLE.

1. Soient A & B les deux centres de force, & qu'un corps à la distance $= z$ soit attiré vers A par la force $= \frac{A}{zz}$, & vers B par la force $= \frac{B}{zz}$, de sorte que A & B marquent la vertu attractive absolue de ces deux centres. Soit outre cela leur distance AB $= a$, & que le corps attiré par ces deux centres, du mouvement duquel il est question, se trouve à présent en M. Nommons ses Planche VI Fig. 1.

ses distances aux centres de forces AM $= v$, & BM $= u$, les angles BAM $= \zeta$, & ABM $= \eta$, de sorte que

$$v = \frac{a \sin \eta}{\sin(\zeta + \eta)}, \qquad \& \quad u = \frac{a \sin \zeta}{\sin(\zeta + \eta)}.$$

Ayant tiré de M à AB la perpendiculaire MP, posons outre cela AP $= x$, & PM $= y$, & nous aurons:

$$x = v \cos\zeta; \quad y = v \sin\zeta = u \sin\eta, \quad \& \ \mathrm{BP} = a - x = u \cos\eta.$$

2. Cela posé, le corps M étant attiré vers A par la force $= \frac{A}{vv}$, la décomposition de cette force donne pour la direction AP la force $= -\frac{Ax}{v^3} = -\frac{A \cos\zeta}{vv}$, & pour la direction PM la force $= -\frac{Ay}{v^3} = -\frac{A \sin\zeta}{vv}$. Ensuite l'attraction du centre B dont la force est $= \frac{B}{uu}$ donne par une semblable décomposition pour la direction AP la force $= + \frac{B(a - x)}{u^3} = + \frac{B \cos\eta}{uu}$, & pour la direction PM la force $= - \frac{By}{u^3} = - \frac{B \sin\eta}{uu}$, de sorte que le corps M est sollicité selon les directions fixes de nos coordonnées AP & PN en tout:

selon AP par la force $= -\frac{Ax}{v^3} + \frac{B(a + x)}{u^3}$,

selon PM par la force $= -\frac{Ay}{v^3} - \frac{By}{u^3}$.

Il est évident que je parle ici des forces accélératrices, & que je suppose le mouvement du corps M se faire dans le même plan avec les centres de forces A & B.

3. Soit

3. Soit maintenant l'élément du tems $= dt$, qui étant pris pour constant, les principes de Mécanique nous fournissent ces deux équations différèntio-différentielles:

$$ddx = 2g\,dt^2\left(-\frac{Ax}{v^3} + \frac{B(a-x)}{u^3}\right)$$

$$ddy = 2g\,dt^2\left(-\frac{Ay}{v^3} - \frac{By}{u^3}\right),$$

où g marque une certaine constante introduite pour ramener les conclusions à des mesures absolues. Mais, comme ici il ne s'en agit point, il n'est pas nécessaire d'expliquer ce qui regarde la valeur de cette lettre g, il suffit de la regarder en général comme une constante.

SECOND ARTICLE.

4. Pour trouver les intégrales de ces deux équations différentielles du second degré, je remarque d'abord que, puisque

$$vv = xx + yy, \quad \& \; uu = (a-x)^2 + yy,$$

il y a, en différentiant:

$$v\,dv = x\,dx + y\,dy; \quad \& \; u\,du = -(a-x)dx + y\,dy.$$

Donc, multipliant la premiere équation par $2dx$ & l'autre par $2dy$, leur somme donnera:

$$2dx\,ddx + 2dy\,ddy = 4g\,dt^2\left(-\frac{A(x\,dx+y\,dy)}{v^3} - \frac{B(-(a-x)dx+y\,dy)}{u^3}\right),$$

qui se réduit à cette équation intégrable:

$$2dx\,ddx + 2dy\,ddy = 4g\,dt^2\left(-\frac{A\,dv}{vv} - \frac{B\,du}{uu}\right),$$

dont l'intégrale est évidemment:

$$dx^2 + dy^2 = 4g\,dt^2\left(\frac{A}{v} + \frac{B}{u} + \frac{C}{a}\right),$$

où C est une constante introduite pour rendre l'intégrale complette.

5. Si

5. Si l'on veut, outre les distances v & u, introduire les angles ζ & η, à cause de

$$dx = dv\cos\zeta - vd\zeta\sin\zeta, \quad \& \quad dy = dv\sin\zeta + vd\zeta\cos\zeta,$$

on aura

$$dx^2 + dy^2 = dv^2 + vvd\zeta^2,$$

& encore par une semblable maniere:

$$dx^2 + dy^2 = du^2 + uud\eta^2,$$

où il faut remarquer que $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ marque l'élément de la courbe, décrit pendant le tems dt; & partant le quarré de la vitesse, que le corps aura en M, sera proportionnel à cette formule $\frac{A}{v} + \frac{B}{u} + \frac{C}{a}$. Au reste l'équation trouvée dans le §. précédent sera

$$dv^2 + vvd\zeta^2 = 4gdt^2\left(\frac{A}{v} + \frac{B}{u} + \frac{C}{a}\right).$$

6. Mais, ayant deux équations différentio-différentielles, il en faut chercher encore une intégrale, ce qui ne paroît pas si aisé. Pour cet effet je change les équations principales dans les formes suivantes:

$$xddy - yddx = 2gdt^2\left(-\frac{Bay}{u^3}\right) = -2gBadt^2 \cdot \frac{\sin\eta}{uu},$$

$$(a-x)ddy + yddx = 2gdt^2\left(-\frac{Aay}{v^3}\right) = -2gAdt^2 \cdot \frac{\sin\zeta}{vv},$$

où je remarque que $xddy - yddx$ est le différentiel de $xdy - ydx$, & $(a-x)ddy + yddx$ le différentiel de $(a-x)dy + ydx$. Or, puisque $x = v\cos\zeta$, & $y = v\sin\zeta$, nous avons $xdy - ydx = vvd\zeta$, & puisque $a - x = u\cos\eta$, & $y = u\sin\eta$, nous avons $(a - x)dy + ydx = uud\eta$, d'où nous tirons ces deux équations:

$$d(vvd\zeta) = -2gBadt^2 \cdot \frac{\sin\eta}{uu}, \quad \& \quad d(uud\eta) = -2gAadt^2 \cdot \frac{\sin\zeta}{vv}.$$

7. Mul-

7. Multiplions-en la premiere par $uud\eta$, & l'autre par $vvd\zeta$, pour avoir leur somme

$$uud\eta.d(vvd\zeta)+vvd\zeta.d(uud\eta)=+2gadt^2(-Ad\zeta\sin\zeta-Bd\eta\sin\eta),$$

dont l'intégration fournit:

$$vvuud\zeta d\eta=2gadt^2(A\cos\zeta+B\cos\eta+D),$$

qui étant jointe à celle que nous venons de trouver

$$dv^2+vvd\zeta^2=4gdt^2\left(\frac{A}{v}+\frac{B}{u}+\frac{C}{a}\right),$$

renferme la détermination du mouvement. Or maintenant il est aisé d'en éliminer l'élément du tems dt, d'où nous parviendrons à cette équation

$$a(dv^2+vvd\zeta^2)(A\cos\zeta+B\cos\eta+D)=$$
$$2vvuud\zeta d\eta\left(\frac{A}{v}+\frac{B}{u}+\frac{C}{a}\right),$$

qui exprime la nature de la courbe décrite par le corps M indépendamment du tems.

TROISIEME ARTICLE.

8. Pour intégrer cette équation, si cela se pouvoit, ou pour en trouver seulement la construction, il faut observer qu'elle ne contient en effet, que deux variables, puisque les angles ζ & η, dépendent des distances v & u, & réciproquement. Si nous en voulions éliminer les angles ζ & η, nous parviendrions à cette équation entre v & u.

$$((vdv-udu)(udv-vdu)+aadvdu)\left(\frac{A(aa+vv-uu)}{v}+\frac{B(aa+uu-vv)+2Da}{u}\right)=$$
$$((aa-vv-uu)dv+2uvdu)((aa-vv-uu)du+2uvdv)\left(\frac{A}{v}+\frac{B}{u}+\frac{C}{a}\right).$$

 Mais

Mais je crains fort que toutes les peines ne feroient inutiles, qu'on voudroit bien se donner pour résoudre cette équation si embarrassée, où même les différentiels dv & du montent à deux dimensions.

9. Il vaudra donc mieux éliminer les distances v & u par les formules $v = \frac{a \sin \eta}{\sin(\zeta + \eta)}$, & $u = \frac{a \sin \zeta}{\sin(\zeta + \eta)}$. Or, pour la formule $dv^2 + vvd\zeta^2 = dx^2 + dy^2$, servons-nous plutôt des expressions

$$x = v \cos\zeta = \frac{a \cos\zeta \sin\eta}{\sin(\zeta + \eta)}, \quad \& \quad y = v \sin\zeta = \frac{a \sin\zeta \sin\eta}{\sin(\zeta + \eta)},$$

d'où nous tirons par la différentiation

$$dx = \frac{-a d\zeta \sin\eta \cos\eta + a d\eta \sin\zeta \cos\zeta}{\sin(\zeta + \eta)^2}, \quad \&$$

$$dy = \frac{a d\zeta \sin\eta^2 + a d\eta \sin\zeta^2}{\sin(\zeta + \eta)^2},$$

& en ajoutant les quarrés, nous aurons:

$$dx^2 + dy^2 = \frac{aa(d\zeta^2 \sin\eta^2 + d\eta^2 \sin\zeta^2 - 2d\zeta d\eta \sin\zeta \sin\eta \cos(\zeta+\eta))}{\sin(\zeta+\eta)^4},$$

qu'il faut multiplier par $a(A \cos\zeta + B \cos\eta + D)$ pour avoir le premier membre de notre équation.

10. Ensuite, ayant $vvuu = \frac{a^4 \sin\zeta^2 \sin\eta^2}{\sin(\zeta + \eta)^4}$, nous aurons

$2vvuu\, d\zeta\, d\eta = \frac{2a^4 d\zeta\, d\eta \sin\zeta^2 \sin\eta^2}{\sin(\zeta + \eta)^4}$, qu'il faut multiplier par

$$\left(\frac{A \sin(\zeta + \eta)}{\sin\eta} + \frac{B \sin(\zeta + \eta)}{\sin\zeta} + C\right) \frac{1}{a},$$

pour

pour avoir le second membre de notre équation, lequel sera par conséquent:

$$\frac{2a^3 d\zeta d\eta \sin\zeta \sin\eta}{\sin(\zeta+\eta)^4}(A\sin\zeta\sin(\zeta+\eta) + B\sin\eta\sin(\zeta+\eta) + C\sin\zeta\sin\eta),$$

qui doit être égal à

$$\frac{a^3(d\zeta^2\sin\eta^2 + d\eta^2\sin\zeta^2 - 2d\zeta d\eta\sin\zeta\sin\eta\cos(\zeta+\eta))}{\sin(\zeta+\eta)^4}(A\cos\zeta + B\cos\eta + D).$$

Divisons de part & d'autre par $\frac{a^3}{\sin(\zeta+\eta)^4}$, & nous aurons

$$(d\zeta^2\sin\eta^2 + d\eta^2\sin\zeta^2 - 2d\zeta d\eta\sin\zeta\sin\eta\cos(\zeta+\eta))(A\cos\zeta + B\cos\eta + D) =$$
$$2d\zeta d\eta\sin\zeta\sin\eta(A\sin\zeta\sin(\zeta+\eta) + B\sin\eta\sin(\zeta+\eta) + C\sin\zeta\sin\eta),$$

qui se réduit à cette forme plus simple:

$$(d\zeta^2\sin\eta^2 + d\eta^2\sin\zeta^2)(A\cos\zeta + B\cos\eta + D) =$$
$$2d\zeta d\eta\sin\zeta\sin\eta(A\cos\eta + B\cos\zeta + C\sin\zeta\sin\eta + D\cos(\zeta+\eta)).$$

11. Puisque $\cos(\zeta+\eta) = \cos\zeta\cos\eta - \sin\zeta\sin\eta$, posons $C - D = E$, de sorte que $C = D + E$, & notre équation sera représentée en sorte

$$d\zeta^2\sin\eta^2 + d\eta^2\sin\zeta^2 = 2d\zeta d\eta\sin\zeta\sin\eta\frac{A\cos\eta + B\cos\zeta + D\cos\zeta\cos\eta + E\sin\zeta\sin\eta}{A\cos\zeta + B\cos\eta + D}.$$

Posons pour abréger

$$A\cos\eta + B\cos\zeta + D\cos\zeta\cos\eta + E\sin\zeta\sin\eta = P,$$
$$A\cos\zeta + B\cos\eta + D = Q,$$

& l'extraction de racine de notre équation donnera

$$d\zeta\sin\eta = \frac{d\eta\sin\zeta(P + \sqrt{(PP - QQ)})}{Q},$$

$$\text{ou bien } \frac{d\zeta\sin\eta}{d\eta\sin\zeta} = \frac{P + \sqrt{(PP - QQ)}}{Q}.$$

 Or

Or, puisque $\frac{P + Q + \sqrt{(PP - QQ)}}{P - Q + \sqrt{(PP - QQ)}} = \frac{\sqrt{(P + Q)}}{\sqrt{(P - Q)}}$, notre équation sera réduite à cette forme moins embarrassée:

$$\frac{d\zeta \sin\eta + d\eta \sin\zeta}{d\zeta \sin\eta - d\eta \sin\zeta} = \frac{\sqrt{(P + Q)}}{\sqrt{(P - Q)}}.$$

12. Puisque les variables ζ & η sont encore extrèmement mêlées ensemble, pour voir plus clair, faisons ces substituons

$\tang \frac{1}{2}\zeta = p$, & $\tang \frac{1}{2}\eta = q$, pour avoir $\frac{d\zeta}{\sin\zeta} = \frac{dp}{p}$, & $\frac{d\eta}{\sin\eta} = \frac{dq}{q}$,

& notre équation prendra cette formule:

$$\frac{q\,dp + p\,dq}{q\,dp - p\,dq} = \sqrt{\frac{P + Q}{P - Q}}$$

Or il y a

$P + Q = (A + B)(\cos\zeta + \cos\eta) + D(\cos\zeta \cos\eta + 1) + E \sin\zeta \sin\eta$, &

$P - Q = (A + B)(\cos\zeta - \cos\eta) + D(\cos\zeta \cos\eta - 1) + E \sin\zeta \sin\eta$.

Mais, ayant en vertu de notre substitution:

$$\sin \tfrac{1}{2}\zeta = \frac{p}{\sqrt{(1 + pp)}}; \quad \cos \tfrac{1}{2}\zeta = \frac{1}{\sqrt{(1 + pp)}};$$

$$\sin \tfrac{1}{2}\eta = \frac{q}{\sqrt{(1 + qq)}}; \quad \sin \tfrac{1}{2}\eta = \frac{1}{\sqrt{(1 + qq)}},$$

nous en tirons:

$$\sin\zeta = \frac{2p}{1+pp}; \quad \cos\zeta = \frac{1-pp}{1+pp}; \quad \sin\eta = \frac{2q}{1+qq}; \quad \cos\eta = \frac{1-qq}{1+qq},$$

& il reste à substituer ces valeurs dans les formules de P + Q & P — Q.

13. Or

13. Or ces substitutions donnent:

$$\cos\zeta+\cos\eta=\frac{1-pp}{1+pp}+\frac{1-qq}{1+qq}=\frac{2-2ppqq}{(1+pp)(1+qq)},$$

$$\cos\zeta\cos\eta+1=\frac{(1-pp)(1-qq)}{(1+pp)(1+qq)}+1=\frac{2+2ppqq}{(1+pp)(1+qq)},$$

$$\sin\zeta\sin\eta=\frac{4pq}{(1+pp)(1+qq)}.$$

$$\cos\eta-\cos\zeta=\frac{1-qq}{1+qq}-\frac{1-pp}{1+pp}=\frac{2pp-2qq}{(1+pp)(1+qq)},$$

$$\cos\zeta\cos\eta-1=\frac{(1-pp)(1-qq)}{(1+pp)(1+qq)}-1=\frac{-2pp-2qq}{(1+pp)(1+qq)},$$

De là nous tirons

$$\frac{P+Q}{P-Q}=\frac{(A+B)(1-ppqq)+D(1+ppqq)+2Epq}{(A-B)(pp-qq)-D(pp+qq)+2Epq},$$

où il arrive fort à propos, que le numérateur est une fonction de pq, & le dénominateur une fonction homogene de deux dimensions de p & q.

14. Cette belle propriété nous engage à cette substitution $pq=r$, & $\frac{p}{q}=s$, de sorte que $pp=rs$, & $qq=\frac{r}{s}$; & de là nous aurons

$$\frac{P+Q}{P-Q}=\frac{(A+B)(1-rr)+D(1+rr)+2Er}{(A-B)(ss-1)-D(ss+1)+2Es}\cdot\frac{1}{qq},$$

ou bien

$$\frac{P+Q}{P-Q}=\frac{s}{r}\cdot\frac{A+B+D+2Er-(A+B-D)rr}{B-A-D+2Es-(B-A+D)ss}.$$

 Or

Or les mêmes substitutions fournissent

$$qdp + pdq = dr, \quad qdp - pdq = qqds = \frac{rds}{s},$$

$$\text{donc } \frac{qdp + pdq}{qdp - pdq} = \frac{sdr}{rds}:$$

Par conséquent, nous obtiendrons par ce moyen cette équation séparée

$$\frac{dr}{\sqrt{((A + B + D)r + 2Err - (A + B - D)r^3)}} = \frac{ds}{\sqrt{((B - A - D)s + 2Ess - (B - A + D)s^3)}},$$

laquelle pouvant être construite par des quadratures, ou même par des arcs de sections coniques, elle fournit la construction de la courbe cherchée.

15. Ayant ainsi réussi à trouver une équation différentielle séparée pour la courbe décrite par le corps M, je ne m'arrêterai pas à déterminer la loi du mouvement. On n'a qu'à prendre l'une ou l'autre des équations du §. 7. & en tirer la valeur du tems t. En faisant le calcul, qui pourroit paroitre d'abord fort ennuyant, mais qui se réduit à la fin à une belle simplicité, on trouve

$$\frac{dt\sqrt{2g}}{a\sqrt{a}} = \frac{dr\sqrt{r}}{(1-r)^2\sqrt{(A+B+D+2Er-(A+B-D)rr)}} + \frac{ds\sqrt{s}}{(1+s)^2\sqrt{(B-A-D+2Es-(B-A+D)ss)}}$$

Au reste les deux lettres D & E marquent des quantités constantes, qui dépendent du mouvement qui aura été imprimé au corps dans le commencement. D'où il est clair que, selon les diverses valeurs de ces deux lettres D & E, les courbes décrites peuvent varier à l'infini, dont la plupart seront ouvertement des courbes transcendantes, cependant il y en a aussi d'algébriques, comme nous le verrons bientôt.

QUA-

QUATRIEME ARTICLE.

16. Il s'agit donc de déterminer les cas, ou les valeurs des constantes D & E, où le rapport des quantités r & s, puisse être exprimé par une équation algébrique. Or le rapport de leurs différentiels étant

$$\frac{dr}{\surd((A+B+D)r+2Err-(A+B-D)r^3)}=$$

$$\frac{ds}{\surd((B-A-D)s+2Ess-(B-A+D)s^3)},$$

je le représenterai pour abréger en sorte

$$\frac{dr}{\surd(\alpha r+2Err+\beta r^3)}=\frac{ds}{\surd(\gamma s+2Ess+\delta s^3)},$$

de sorte que

$$\alpha=A+B+D;\ \beta=D-A-B;\ \gamma=B-A-D;\ \delta=A-B-D,$$

où j'observe que, s'il étoit $\alpha=\gamma$, & $\beta=\delta$, le rapport entre r & s pourroit être exprimé algébriquement. Mais ce cas ne sauroit avoir lieu, à moins qu'il ne fût $A=0$, & $D=0$, ce qui est le cas où le corps M seroit attiré au seul centre B, qui est déjà très connu d'ailleurs.

17. Mais cette ressemblance des dénominateurs peut avoir lieu plus généralement $r=mx$, & $s=ny$, pour avoir:

$$\frac{dx\surd m}{\surd(\alpha x+2Emxx+\beta mmx^3)}=\frac{dy\surd n}{\surd(\gamma y+2Enyy+\delta nny^3)},$$

ou bien

$$\frac{dx\surd\gamma m}{\surd(\alpha\gamma x+2E\gamma mxx+\beta\gamma mmx^3)}=\frac{dy\surd\alpha n}{\surd(\alpha\gamma y+2E\alpha nyy+\alpha\delta nny^3)}.$$

Maintenant les dénominateurs seront semblables, si $\gamma m=\alpha n$, & $\beta\gamma mm=\alpha\delta nn$, ou $\alpha\alpha\beta\gamma=\alpha\gamma\gamma\delta$, donc $\alpha\beta=\gamma\delta$, & partant $DD-(A+B)^2=DD-(B-A)^2$, d'où il s'ensuit

s'ensuit, ou $A = 0$, ou $P = 0$, ce qui encore est le cas où le corps est attiré vers un seul centre de force, & qui n'a aucune difficulté, puisque la courbe est toujours une section conique. D'où il semble, que d'autres cas ne sont pas possibles.

18. Cette conséquence est aussi juste, tant que la constante E n'est pas zéro. Mais, dès que nous prenons $E = 0$, pour la ressemblance des dénominateurs, il suffit qu'il soit $\beta\gamma mm = \alpha\delta nn$. Soit donc $E = 0$; $mm = \alpha\delta k$, & $nn = \beta\gamma k$, ou bien $r = x\sqrt{\alpha\delta k}$, & $s = y\sqrt{\beta\gamma k}$; & l'équation à résoudre aura cette forme

$$\frac{dx\sqrt[4]{\alpha\gamma\gamma\delta k}}{\sqrt{(\alpha\gamma x + \alpha\beta\gamma\delta k x^3)}} = \frac{dy\sqrt[4]{\alpha\alpha\beta\gamma k}}{\sqrt{(\alpha\gamma y + \alpha\beta\gamma\delta k y^3)}},$$

ou
$$\frac{dx\sqrt[4]{\gamma\delta}}{\sqrt{(x + \beta\delta k x^3)}} = \frac{dy\sqrt[4]{\alpha\beta}}{\sqrt{(y + \beta\delta k y^3)}},$$

où les dénominateurs sont semblables; ce qui est une condition requise pour rendre le rapport algébrique. Mais il faut outre cela que les coëfficiens des numérateurs aient un rapport rationnel, lequel étant posé comme μ à ν nous aurons $\gamma\delta : \alpha\beta = \mu^4 : \nu^4$, & partant $DD - (A - B)^2 : DD - (A + B)^2 = \mu^4 : \nu^4$.

19. Je dis donc que, toutes les fois que la constante E évanouit, & que $DD = \frac{\mu^4 (A + B)^2 - \nu^4 (A - B)^2}{\mu^4 - \nu^4}$, ou bien $E = 0$, & $DD = AA + BB + \frac{2AB(\mu^4 + \nu^4)}{\mu^4 + \nu^4}$, les lettres μ & ν signifiant des nombres entiers; dans tous ces cas je dis que la courbe décrite par le corps M sera algébrique. Car, posant $k = \frac{1}{\beta\delta}h$, & partant

$$r = x\sqrt{\frac{D + A + B}{D - A - B}h}, \quad \& \quad s = y\sqrt{\frac{D + A - B}{D - A + B}h},$$

notre

notre équation à résoudre sera

$$\frac{\mu dx}{\sqrt{(x + hx^3)}} = \frac{\nu dy}{\sqrt{(y + hy^3)}},$$

de laquelle j'ai démontré ailleurs, que son intégrale & même la complette, est algébrique. Mais cette intégrale sera d'autant plus compliquée, plus le rapport des nombres μ & ν est composé. Or cela mérite d'être developpé plus en détail.

20. Rien n'empêche qu'on ne mette $h = 1$; car, quand même les quantités x & y deviendroient imaginaires, en remontant aux quantités primitives ζ, η, ou v, u, il n'en résultera aucun inconvénient, & la réalité y sera toujours rétablie. Or, ayant trouvé l'intégrale de cette équation $\frac{\mu dx}{\sqrt{(x + x^3)}} = \frac{\nu dy}{\sqrt{(y + y^3)}}$, & prenant $D = \sqrt{\left(AA + BB + \frac{2AB(\mu^4 + \nu^4)}{\mu^4 - \nu^4}\right)}$, on n'a qu'à substituer dans l'intégrale

$$x\sqrt{\frac{D+A+B}{D-A-B}} = r = pq = \text{tang}\tfrac{1}{2}\zeta\,\text{tang}\tfrac{1}{2}\eta = \frac{\sin\zeta\,\sin\eta}{(1+\cos\zeta)(1+\cos\eta)} = \sqrt{\frac{(1-\cos\zeta)(1-\cos\eta)}{(1+\cos\zeta)(1+\cos\eta)}},$$

$$y\sqrt{\frac{D+A-B}{D-A+B}} = s = \frac{p}{q} = \text{tang}\tfrac{1}{2}\zeta\,\cot\tfrac{1}{2}\eta = \frac{\sin\zeta\,\sin\eta}{(1+\cos\zeta)(1-\cos\eta)} = \sqrt{\frac{(1-\cos\zeta)(1+\cos\eta)}{(1+\cos\zeta)(1-\cos\eta)}},$$

pour arriver à l'équation algébrique de la courbe décrite. Il ne s'agit donc que de trouver l'intégrale de l'équation

$$\frac{\mu dx}{\sqrt{(x + x^3)}} = \frac{\nu dy}{\sqrt{(y + y^3)}},$$

& pour cet effet il faut commencer par le cas $\mu = \nu = 1$, & de là monter ſucceſſivement à des plus grands nombres.

Intégration de l'équation

$$\frac{dx}{\sqrt{(x + x^3)}} = \frac{dy}{\sqrt{(y + y^3)}}.$$

21. Au défaut d'une méthode directe de trouver le rapport entre les variables x, & y, je me ſervirai de la même méthode indirecte, que j'ai expliquée autrefois en ſuppoſant l'intégrale

$$0 = \mathfrak{A} + 2\mathfrak{B}(x+y) + \mathfrak{C}(xx+yy) + 2\mathfrak{D}xy + 2\mathfrak{E}xy(x+y) + \mathfrak{F}xxyy,$$

dont l'extraction de racine donne:

$$x = \frac{-\mathfrak{B} - \mathfrak{D}y - \mathfrak{E}yy + \sqrt{((\mathfrak{B}+\mathfrak{D}y+\mathfrak{E}yy)^2 - (\mathfrak{A}+2\mathfrak{B}y+\mathfrak{C}yy)(\mathfrak{C}+2\mathfrak{E}y+\mathfrak{F}yy))}}{\mathfrak{C}+2\mathfrak{E}y+\mathfrak{F}yy},$$

$$y = \frac{-\mathfrak{B} - \mathfrak{D}x - \mathfrak{E}xx - \sqrt{((\mathfrak{B}+\mathfrak{D}x+\mathfrak{E}xx)^2 - (\mathfrak{A}+2\mathfrak{B}x+\mathfrak{C}xx)(\mathfrak{C}+2\mathfrak{E}x+\mathfrak{F}xx))}}{\mathfrak{C}+2\mathfrak{E}x+\mathfrak{F}xx}.$$

Donc, poſant pour abréger les formules irrationelles:

$$\sqrt{((\mathfrak{B}+\mathfrak{D}x+\mathfrak{E}xx)^2 - (\mathfrak{A}+2\mathfrak{B}x+\mathfrak{C}xx)(\mathfrak{C}+2\mathfrak{E}x+\mathfrak{F}xx))} = X,$$

$$\sqrt{((\mathfrak{B}+\mathfrak{D}y+\mathfrak{E}yy)^2 - (\mathfrak{A}+2\mathfrak{B}y+\mathfrak{C}yy)(\mathfrak{C}+2\mathfrak{E}y+\mathfrak{F}yy))} = Y,$$

nous aurons:

$$\mathfrak{B} + \mathfrak{D}x + \mathfrak{E}xx + \mathfrak{C}y + 2\mathfrak{E}xy + \mathfrak{F}xxy = -X, \quad \&$$

$$\mathfrak{B} + \mathfrak{D}y + \mathfrak{E}yy + \mathfrak{C}x + 2\mathfrak{E}xy + \mathfrak{F}xyy = \quad Y.$$

22. Or l'équation ſuppoſée étant différentiée donne

$$\left.\begin{aligned} &+dx(\mathfrak{B} + \mathfrak{C}x + \mathfrak{D}y + 2\mathfrak{E}xy + \mathfrak{E}yy + \mathfrak{F}xyy) \\ &+dy(\mathfrak{B} + \mathfrak{C}y + \mathfrak{D}x + 2\mathfrak{E}xy + \mathfrak{E}xx + \mathfrak{F}xxy) \end{aligned}\right\} = 0,$$

laquelle, en introduiſant les valeurs irrationelles X & Y, ſe change en cette forme

$$Y dx - X dy = 0, \quad \text{ou bien} \quad \frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y}.$$

Voilà

Voilà donc une équation différentielle entre x & y, où les variables sont séparées, & dont l'intégrale est précisément l'équation algébrique supposée. Cette équation est aussi infiniment plus générale que la proposée, & on voit bien que celle-ci y est comprise.

23. Donc, pour rendre les formules X & Y semblables aux proposées $\sqrt{(x + x^3)}$, & $\sqrt{(y + y^3)}$, les coëfficiens $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, &c. doivent être déterminés en sorte qu'il devienne:

$$\mathfrak{B}\mathfrak{B}-\mathfrak{A}\mathfrak{C}=0; \quad \mathfrak{E}\mathfrak{E}-\mathfrak{C}\mathfrak{F}=0, \quad \& \quad \mathfrak{D}\mathfrak{D}-2\mathfrak{B}\mathfrak{E}-\mathfrak{A}\mathfrak{F}-\mathfrak{C}\mathfrak{C}=0.$$

Donc $\mathfrak{B}=\sqrt{\mathfrak{A}\mathfrak{C}}$; $\mathfrak{E}=\sqrt{\mathfrak{C}\mathfrak{F}}$, $\mathfrak{D}\mathfrak{D}=\mathfrak{C}\mathfrak{C}+\mathfrak{A}\mathfrak{F}+2\mathfrak{C}\sqrt{\mathfrak{A}\mathfrak{F}}$, ou $\mathfrak{D}=\pm(\mathfrak{C}+\sqrt{\mathfrak{A}\mathfrak{F}})$. De là nous aurons:

$$X=\sqrt{(2x(\mathfrak{B}\mathfrak{D}-\mathfrak{A}\mathfrak{E}-\mathfrak{B}\mathfrak{C})+2x^3(\mathfrak{D}\mathfrak{E}-\mathfrak{C}\mathfrak{E}-\mathfrak{B}\mathfrak{F}))}, \quad \text{ou}$$

$$X=\sqrt{(2x(\mathfrak{D}\sqrt{\mathfrak{A}\mathfrak{C}}-\mathfrak{A}\sqrt{\mathfrak{C}\mathfrak{F}}-\mathfrak{C}\sqrt{\mathfrak{A}\mathfrak{C}})+2x^3(\mathfrak{D}\sqrt{\mathfrak{C}\mathfrak{F}}-\mathfrak{F}\sqrt{\mathfrak{A}\mathfrak{C}}-\mathfrak{C}\sqrt{\mathfrak{C}\mathfrak{F}}))},$$

qui se réduit à cette forme:

$$X=\sqrt{2(\mathfrak{D}\sqrt{\mathfrak{C}}-\sqrt{\mathfrak{A}\mathfrak{C}\mathfrak{F}}-\mathfrak{C}\sqrt{\mathfrak{C}})(x\sqrt{\mathfrak{A}}+x^3\sqrt{\mathfrak{F}})}.$$

Il faut donc prendre $\mathfrak{D}=-\mathfrak{C}-\sqrt{\mathfrak{A}\mathfrak{F}}$, pour avoir:

$$X=2\sqrt{-(\sqrt{\mathfrak{A}\mathfrak{C}\mathfrak{F}}+\mathfrak{C}\sqrt{\mathfrak{C}})(x\sqrt{\mathfrak{A}}+x^3\sqrt{\mathfrak{F}})}, \quad \&$$

$$Y=2\sqrt{-(\sqrt{\mathfrak{A}\mathfrak{C}\mathfrak{F}}+\mathfrak{C}\sqrt{\mathfrak{C}})(y\sqrt{\mathfrak{A}}+y^3\sqrt{\mathfrak{F}})},$$

24. Posons donc $\mathfrak{F}=\mathfrak{A}$, & nous aurons

$$\mathfrak{D}=-\mathfrak{A}-\mathfrak{C}; \quad \mathfrak{B}=\sqrt{\mathfrak{A}\mathfrak{C}}, \quad \& \quad \mathfrak{E}=\sqrt{\mathfrak{A}\mathfrak{C}},$$

& partant

$$X=2\sqrt{-(\mathfrak{A}+\mathfrak{C})(x+x^3)\sqrt{\mathfrak{A}\mathfrak{C}}},$$

$$Y=2\sqrt{-(\mathfrak{A}+\mathfrak{C})(y+y^3)\sqrt{\mathfrak{A}\mathfrak{C}}},$$

d'où notre équation intégrable sera

$$\frac{dx}{\sqrt{(x+x^3)}}=\frac{dy}{\sqrt{(y+y^3)}};$$

dont l'intégrale est exprimée en sorte:

$$0=\mathfrak{A}+2(x+y)\sqrt{\mathfrak{A}\mathfrak{C}}+\mathfrak{C}(xx+yy)-2(\mathfrak{A}+\mathfrak{C})xy+2xy(x+y)\sqrt{\mathfrak{A}\mathfrak{C}}+\mathfrak{A}xxyy.$$

Ou posons $\mathfrak{C} = 1$, & $\mathfrak{A} = nn$, pour avoir:

$$0 = nn + 2n(x+y) + xx + yy - 2(1+nn)xy + 2nxy(x+y) + mmxxyy,$$

laquelle contenant la constante arbitraire, n, doit être censée l'intégrale complette de l'équation différentielle proposée.

25. Soit $n = -m$; pour avoir:

$\mathfrak{A} = mm$; $\mathfrak{B} = -m$; $\mathfrak{C} = 1$; $\mathfrak{D} = -1 - mm$; $\mathfrak{E} = -m$; & $\mathfrak{F} = mm$,

de sorte que l'équation intégrale soit:

$$0 = mm - 2m(x+y) + xx + yy - 2(1+mm)xy - 2mxy(x+y) + mmxxyy,$$

d'où nous concluons:

$$x = \frac{m + (1+mm)y + myy + 2\sqrt{(m+m^3)(y+y^3)}}{1 - 2my + mmyy}, \;\&$$

$$y = \frac{m + (1+mm)x + mxx - 2\sqrt{(m+m^3)(x+x^3)}}{1 - 2mx + mmxx}.$$

On pourra donc exprimer algébriquement tant x par y, que y par x, pour satisfaire à l'équation différentielle proposée

$$\frac{dx}{\sqrt{(x+x^3)}} = \frac{dy}{\sqrt{(y+y^3)}},$$

où je remarque que, posant $y = 0$, on aura $x = m$; & si $x = 0$, on aura $y = m$.

26. Que $\Pi.x$ marque l'intégrale $\int \frac{dx}{\sqrt{(x+x^3)}}$ prise en sorte, qu'elle évanouisse au cas $x = 0$, de sorte que $\Pi.x$ indique une fonction déterminée de x, mais transcendante. De même maniere soit $\Pi.y = \int \frac{dy}{\sqrt{(y+y^3)}}$, prenant cette intégrale en sorte que, posant $y = 0$, elle évanouisse; & l'intégrale de notre équation différentielle pourra être représentée de cette façon:

$$\Pi.x = \Pi.y - \Pi.m,$$

puis-

puisque, si l'on met $x = 0$, il devient $y = m$. Et cette équation finie, quoique transcendante, doit être censée équivalente à l'équation algébrique entre x & y. Donc, pour qu'il soit $\Pi . y = \Pi . x + \Pi . m$, il faut prendre

$$y = \frac{(m + x)(1 + mx) - 2\sqrt{(m + m^3)(x + x^3)}}{(1 - mx)^2}.$$

Intégration de l'équation

$$\frac{2dx}{\sqrt{(x + x^3)}} = \frac{dy}{\sqrt{(y + y^3)}}.$$

27. En employant les fonctions transcendantes expliquées, nous venons de voir, que l'égalité $\Pi . q = \Pi . p + \Pi . m$, répond à cette équation:

$$q = \frac{(m + p)(1 + mp) - 2\sqrt{(m + m^3)(p + p^3)}}{(1 - mp)^2}.$$

Donc, posant $m = p$, pour qu'il soit $\Pi . q = 2\Pi . p$, nous aurons

$$q = \frac{2p(1 + pp) - 2\sqrt{(p + p^3)^2}}{(1 - pp)^2},$$

où il est évident, qu'il faut changer de signe le radical, comme étant ambigu en soi-même: & partant $q = \frac{4p(1 + pp)}{(1 - pp)^2}$. Posons maintenant $\Pi . r = \Pi . q + \Pi . m$, & nous aurons

$$r = \frac{(m + q)(1 + mq) + 2\sqrt{(m + m^3)(q + q^3)}}{(1 - mq)^2},$$

ce qui sera le rapport qui convient à cette égalité $\Pi . r = 2\Pi . p + \Pi . m$, prenant $q = \frac{4p(1 + pp)}{(1 - pp)^2}$.

28. Où bien, sans nous embarrasser de l'extraction de racine, l'égalité $\Pi.q = \Pi.p + \Pi.m$ demande cette équation

$$0 = mm - 2m(p+q) + pp + qq - 2(1+mm)pq - 2mpq(p+q) + mmppqq,$$

qui se réduit à cette forme

$$(m + mpq - p - q)^2 = 4(1 + mm)pq.$$

Faisons maintenant $m = p$, & l'égalité $\Pi.q = 2\,\Pi.p$, renferme cette équation $q(1 - pp)^2 = 4p(1 + pp)$, & prenant outre cela $(m + mqr - q - r)^2 = 4(1 + mm)qr$, l'équation entre p & r convient à cette égalité $\Pi.r = 2\,\Pi.p + \Pi.m$, Or, puisque m marque une constante quelconque, cette égalité est l'intégrale complette de cette équation :

$$\frac{dr}{\sqrt{(r + r^3)}} = \frac{2\,dp}{\sqrt{(p + p^3)}}$$

29. Ecrivons maintenant x pour p, & y pour r, pour avoir l'équation différentielle proposée $\dfrac{2\,dx}{\sqrt{(x + x^3)}} = \dfrac{dy}{\sqrt{(y + y^3)}}$: & il est clair que le rapport entre x & y est algébrique, & exprimé par ces équations :

$$y = \frac{(m + q)(1 + mq) + 2\sqrt{(m + m^3)(q + q^3)}}{(1 - mq)^2},$$

$$\& \quad q = \frac{4x(1 + xx)}{(1 - xx)^2},$$

ou, en remettant pour q cette valeur, on aura

$$y = \frac{(m(1-xx)^2 + 4x(1+xx))((1-xx)^2 + 4mx(1+xx)) + 4(1-xx)(1+6xx+x^4)\sqrt{(m+m^3)(x+x^3)}}{((1-xx)^2 - 4mx(1+xx))^2}$$

Ou conservant la lettre $q = \dfrac{4x(1 + xx)}{(1 - xx)^2}$, l'équation intégrale sera

$$0 = (y - q)^2 - 2m(1 + qy)(q + y) + mm(1 - qy)^2,$$

qui est en même tems complette.

Inté-

Intégration de l'équation.

$$\frac{3dx}{\sqrt{(x+x^3)}} = \frac{dy}{\sqrt{(y+y^3)}}.$$

30. Posons $\Pi.z = 2\,\Pi.x + \Pi.m$, & nous venons de voir que le rapport algébrique entre x & z est exprimé en sorte:

$$z = \frac{(m+p)(1+mp) + 2\sqrt{(m+m^3)(p+p^3)}}{(1-mp)^2},$$

$$\text{prenant } p = \frac{4x(1+xx)}{(1-xx)^2}.$$

Soit maintenant $m = x$, ou $\Pi.z = 3\,\Pi.x$, & on aura

$$z = \frac{(x+p)(1+px) + 2\sqrt{(p+p^3)(x+x^3)}}{(1-px)^2},$$

$$\text{prenant } p = \frac{4x(1+xx)}{(1-xx)^2}.$$

Faisons de plus $\Pi.y = \Pi.z + \Pi.m = 3\,\Pi.x + \Pi.m$, & nous aurons:

$$y = \frac{(m+z)(1+mz) + 2\sqrt{(m+m^3)(z+z^3)}}{(1-mz)^2},$$

31. Donc, puisque cette égalité est l'intégrale complette de l'équation différentielle proposée $\frac{3dx}{\sqrt{(x+x^3)}} = \frac{dy}{\sqrt{(y+y^3)}}$, le rapport entre x & y sera exprimé algébriquement en sorte

$$p = \frac{4x(1+xx)}{(1-xx)^2},$$

$$q = \frac{(p+x)(1+px) + 2\sqrt{(p+p^3)(x+x^3)}}{(1-px)^2},$$

$$y = \frac{(m+q)(1+mq) + 2\sqrt{(m+m^3)(q+q^3)}}{(1-mq)^2},$$

où

où il faut remarquer que, substituant la valeur de p, on aura

$$q = \frac{x(3 + 6xx - x^4)^2}{(1 - 6xx - 3x^4)^2}.$$

Intégration de l'équation

$$\frac{4dx}{\sqrt{(x + x^3)}} = \frac{dy}{\sqrt{(y + y^3)}}.$$

32. En poursuivant la même méthode, le rapport entre les variables x & y sera exprimé par les équations algébriques suivantes :

$$p = \frac{4x(1 + xx)}{(1 - xx)^2},$$

$$q = \frac{(p + x)(1 + px) + 2\sqrt{(p + p^3)(x + x^3)}}{(1 - px)^2},$$

$$r = \frac{(q + x)(1 + qx) + 2\sqrt{(q + q^3)(x + x^3)}}{(1 - qx)^2},$$

$$y = \frac{(m + r)(1 + mr) + 2\sqrt{(m + m^3)(r + r^3)}}{(1 - mr)^2},$$

d'où il est évident, comme il faut continuer ces intégrations pour toutes les formules $\frac{\mu dx}{\sqrt{(x + x^3)}} = \frac{dy}{\sqrt{(y + y^3)}}$, où μ marque un nombre entier quelconque.

Intégration de l'équation

$$\frac{\mu dx}{\sqrt{(x + x^3)}} = \frac{\nu dy}{\sqrt{(y + y^3)}}.$$

33. Qu'on cherche premierement par la méthode précédente les intégrales de ces deux égalités

$$\frac{\mu dx}{\sqrt{(x + x^3)}} = \frac{dz}{\sqrt{(z + z^3)}}, \quad \& \quad \frac{\nu dy}{\sqrt{(y + y^3)}} = \frac{dz}{\sqrt{(z + z^3)}},$$

où

où il suffit de prendre l'une complette, & de supposer dans l'autre la constante = o. Alors, ayant le rapport entre x & z, & entre y & z, on n'a qu'à éliminer z, pour avoir la rélation requise entre x & y, ce qui se fera aisément, puisque l'une & l'autre intégration donne une valeur pour z, l'une par x & l'autre par y, & ces deux valeurs étant égalées entr'elles donnent d'abord l'équation cherchée.

CONCLUSION.

34. Voilà donc une solution parfaite du probleme que je me suis proposé, d'où il est clair que, parmi toutes les courbes possibles, que le corps M puisse décrire étant sollicité vers deux centres de forces, il y en a une infinité qui sont algébriques. Cela arrive toutes les fois qu'il y a dans la solution générale, E = o, & l'autre constante $D = \sqrt{\frac{\mu^4 (A + B)^2 - \nu^4 (A - B)^2}{\mu^4 - \nu^4}}$, les lettres μ & ν marquant des nombres entiers quelconques. Dans ces cas on n'a qu'à chercher l'intégrale de l'égalité $\frac{\mu dx}{\sqrt{(x + x^3)}} = \frac{\nu dy}{\sqrt{(y + y^3)}}$, qui sera toujours algébrique, comme je viens de le faire voir, & ensuite posant

$$x = \tang \tfrac{1}{2} \zeta \tang \tfrac{1}{2} \eta . \sqrt{\frac{D - A - B}{D + A + B}}, \quad \&$$

$$y = \tang \tfrac{1}{2} \zeta \cot \tfrac{1}{2} \eta . \sqrt{\frac{D - A + B}{D + A - B}},$$

on aura une équation algébrique entre $\tang \frac{1}{2} \zeta$, & $\tang \frac{1}{2} \eta$, d'où l'on tirera ensuite aisément une entre les coordonnées AP & PM.

SUR LE TEMS DE LA CHUTE D'UN CORPS ATTIRÉ VERS UN CENTRE DE FORCES, EN RAISON RÉCIPROQUE DES DISTANCES.

PAR M. J. A. EULER.

Traduit du Latin.

Quoique ce probleme ait déjà été souvent traité, il mérite bien qu'on le reprenne encore d'une maniere abrégée, puisque par sa solution on parvient à une formule différentielle que personne n'a encore intégrée directement, & pour l'intégration de laquelle il faut un artifice particulier, dont l'usage ne se borne pas à la solution de ce seul probleme, mais peut revenir fréquemment dans toute l'Analyse. C'est ce que nous allons mettre dans un jour suffisant par cette solution même.

En effet cette hypothese, parmi toutes les autres qui supposent que le centre de forces attire en raison des puissances des distances, est principalement sujette à l'inconvénient, que la valeur intégrale de la vitesse ne sauroit être exprimée par des quantités algébriques, mais qu'elle dépend des logarithmes; d'où il arrive que la valeur différentielle du tems, parce qu'elle dépend de la vitesse, ne sauroit absolument être intégrée, à cause de la quantité logarithmique qui y entre, de laquelle on tire par conséquent la racine quarrée. Car c'est surtout dans l'intégration des formules différentielles qui renferment des quantités transcendantes, que l'Analyse se trouve fort défectueuse; & il est extrêmement rare que ces formules soyent susceptibles d'intégration.

En

En particulier, dans le cas proposé, on ne sauroit espérer que le tems indéfini dans lequel une portion d'espace quelconque est parcourue, puisse jamais être exprimé par des quantités, soit algébriques, soit de celles qui renferment la quadrature du cercle ou de l'hyperbole; ce qui sert à rendre d'autant plus remarquable, que le tems entier de la descente puisse être exprimé par cette formule simple qui dépend de la quadrature du cercle.

Soit la distance du centre de forces du point où le corps commence à tomber, a, & qu'au bout d'un certain tems t il parvienne à quelque point du milieu qu'il parcourt, dont la distance au point où le mouvement a commencé soit $= x$; la distance de ce même point du milieu au centre des forces sera $= a - x$.

A' présent pour définir la force qui meut le corps dans ce point du milieu, soit f la distance où la force centripete est égale à la gravité: en posant donc la masse du corps $=$ A, en sorte que A dénote le poids que le corps auroit, à la surface de la terre, la force centripete du corps à la distance f du centre sera $=$ A.

Soit de plus dans ce point du milieu, & à la distance $a - x$, du corps au centre, sa force centripete $=$ P, on voit par l'hypothese que la force qui chasse le corps vers en bas sera

à la distance f du centre, que nous avons appellée A, comme $\frac{1}{f}$, &

à la distance $a - x$ du centre, que nous avons appellée P, comme $\frac{1}{a - x}$.

Nous aurons donc la proportion suivante;

$$\frac{1}{f} : A = \frac{1}{a - x} : P,$$

 de

de laquelle nous obtiendrons la valeur de la force qui sollicite le corps à la distance $a - x$ du centre de forces $P = \frac{Af}{a - x}$.

Or, la force P étant trouvée, les principes connus du mouvement nous fournissent cette équation

$$\frac{2ddx}{dt^2} = \frac{P}{A} = \frac{f}{a - x},$$

en prenant le différentiel du tems dt pour constant, & en exprimant les espaces par des parties milliemes du pied du Rhin, l'unité à laquelle la mesure du tems se rapporte sera la 250 partie d'une seconde.

Nous aurons donc à definir le tems t par l'équation différentielle du second degré $\frac{2ddx}{dt^2} = \frac{f}{a - x}$; & afin d'en venir plus aisément à bout, posons pour abréger la distance du corps pour le tems t du centre $a - x = y$, & notre équation, à cause de $ddx = - ddy$, revêtira cette forme $\frac{-2ddy}{dt^2} = \frac{f}{y}$.

Présentement, afin que cette équation soit rendue intégrable, qu'on la multiplie par dy, & nous obtiendrons $\frac{-2dyddy}{dt^2} = \frac{fdy}{y}$, laquelle étant intégrée nous fournira cette égalité Const. $- \frac{dy^2}{dt^2} = fly$.

Or $\frac{-dy}{dt}$ exprime la vitesse par laquelle le corps parcourt, à la distance y du centre de forces, le petit espace $- dy$. Posons-la $\sqrt{v}$, ou soit v la hauteur par laquelle le corps, s'il tomboit à la surface de la terre, acquerroit cette vitesse. On aura donc $v = \frac{dy^2}{dt^2}$, laquelle valeur étant substituée, l'équation revêtira cette forme Const. $- v = fly$.

A' préſent, pour déterminer la quantité conſtante qui a été introduite par l'intégration, que l'on conſidere quelque état du corps qui nous ſoit connu, & que la quantité conſtante ſoit déterminée de façon qu'elle ſatisfaſſe à cet état du corps. Pour cet effet, que l'on conſidere l'état du corps au commencement, où il étoit encore diſtant du centre de forces de la quantité a; & comme nous avons ſuppoſé que le corps n'avoit encore eu aucun mouvement, & par conſéquent aucune viteſſe, nous devons ſatisfaire à cette condition, & accommoder notre équation de ſorte que v évanouiſſe, en poſant $y = a$. Poſons donc dans notre équation Conſt. $- v = fly$; $y = a$, & $v = 0$, & nous aurons cette équation Conſt. $- 0 = fla$, par laquelle on trouve d'abord que la quantité conſtante eſt $= fla$.

Ainſi ſubſtituons la valeur trouvée pour la quantité conſtante, dans l'équation Conſt. $- v = fly$; & elle ſe changera en celle-ci, $fla - v = fly$; d'où l'on tire la hauteur due à la viteſſe du corps à la diſtance y du centre $v = fl\frac{a}{y}$, & de là la viteſſe même

$$\sqrt{v} = \sqrt{fl\frac{a}{y}}.$$

Si préſentement dans cette formule on poſe $y = 0$, on trouve la viteſſe du corps au centre même de forces $= \sqrt{fl\frac{a}{0}}$, qui eſt une quantité infinie pour ainſi dire du plus bas ordre, parce que la racine quarrée ſe tire du logarithme d'un infini, qui eſt déjà infiniment plus petit que $\frac{a}{0}$.

Mais revenons à notre but, & cherchons le tems de la deſcente t. Pour cet effet, qu'on ſubſtitue de nouveau dans l'équation $v = fl\frac{a}{y}$, pour v ſa valeur $\frac{dy^2}{dt^2}$, & elle revêtira cette forme

$\frac{dy^2}{dt^2} = fl\frac{a}{y}$. De là $\frac{dy}{dt} = \sqrt{fl\frac{a}{y}}$, par laquelle équation l'élément du tems est aussitôt défini, en sorte qu'il est

$$dt = \frac{dy}{\sqrt{fl\frac{a}{y}}} = \frac{1}{\sqrt{f}} \cdot \frac{dy}{\sqrt{l\frac{a}{y}}},$$

d'où en intégrant, le tems indéfini de la descente du corps, qui répond à la distance y du centre de forces, sera

$$t = \frac{1}{\sqrt{f}} \int \frac{dy}{\sqrt{l\frac{a}{y}}},$$

dans laquelle formule on doit remarquer qu'il faut intégrer de façon qu'en posant $y = a$, le tems t évanouisse, parce que dans la détermination de la quantité constante précédente, nous avons déjà posé que le mouvement du corps, lorsqu'il étoit encore distant de la quantité a du centre de forces, avoit été nul.

Toute la solution de ce Probleme dépend donc de l'intégration de la formule $\frac{dy}{\sqrt{l\frac{a}{y}}}$, ou, en posant $y = az$, afin que le tems de la descente soit $t = \frac{a}{\sqrt{f}} \int \frac{dz}{\sqrt{l\frac{1}{z}}} = \frac{a}{\sqrt{f}} \int \frac{dz}{\sqrt{l - z}}$, de l'intégration de la formule $\frac{dz}{\sqrt{l - z}}$, & même seulement sa valeur qui naît si après l'intégration on pose $z = 1$, vû que c'est le tems de la descente entiere qu'on desire.

Et c'est là cette formule même de laquelle j'ai fait mention au commencement, & dont personne n'a encore donné l'intégration *a priori*, quoiqu'on la cherche seulement pour le cas $z = 1$.

Or

Or notre formule $\frac{dz}{\sqrt{-lz}}$ peut être considérée comme un cas de cette formule générale $dz(-lz)^n$, qui en naîtroit en posant $n = \frac{1}{2}$; de façon que, si sa valeur $\int dz(-lz)^n$ nous étoit connue, nous connoitrions aussi d'abord sa valeur $\int\frac{dz}{\sqrt{l-z}}$. En effet, ce qui est alors produit sera la valeur cherchée dont nous avons besoin pour indiquer le tems de la descente du corps par la distance a du de forces.

Considérons donc cette formule qui a plus d'étendue; pour nous occuper de la recherche des cas où elle admet l'intégration; & comme on a en général, quoi que ce soit qu'on écrive au lieu de x & de y, $\int ydx = xy - \int xdy$, après l'application faite à la formule proposée $\int dz(-lz)^n$, nous aurons

$$\int dz(-lz)^n = z(-lz)^n + n\int dz(-lz)^{n-1};$$

& en posant de nouveau pour $\int dz(-lz)^{n-1}$ sa valeur équivalente $z(-lz)^{n-1} + (n-1)\int dz(-lz)^{n-2}$, nous aurons $\int dz(-lz)^n = z(-lz)^n + nz(-lz)^{n-1} + n(n-1)\int dz(-lz)^{n-2}$. De plus, comme on a pareillement

$$\int dz(-lz)^{n-2} = z(-lz)^{n-2} + (n-2)\int dz(-lz)^{n-3},$$

en substituant de nouveau cette valeur nous obtiendrons

$$\int dz(-lz)^n = z(-lz)^n + nz(-lz)^{n-1} + n(n-1)z(-lz)^{n-2} + (n-1)(n-2)\int dz(-lz)^{n-3}.$$

D'où il paroit qu'en continuant cette substitution à l'infini, on auroit

$$\int dz(-lz)^n = z(-lz)^n + nz(-lz)^{n-1} + n(n-1)z(-lz)^{n-2} + n(n-1)(n-2)z(-lz)^{n-3} + \&c.$$

ou

$$\int dz(-lz)^n = z((-lz)^n + n(-lz)^{n-1} + n(n-1)(-lz)^{n-2} + n(n-1)(n-2)(-lz)^{n-3} + \&c.$$

Cette

Cette série trouvée au lieu de son intégrale $dz(-lz)^n$ se continue réellement à l'infini, à moins que n ne soit un nombre entier. Considérons donc tout d'abord le cas où n est un nombre entier, & voyons si, des valeurs de cette formule intégrale, qu'elle revêt quand on pose pour n un nombre entier, nous pouvons conclurre quelque chose par rapport à la valeur qui naît si n est posé $= \frac{1}{2}$.

Or il est manifeste que, toutes les fois que n est un nombre entier, la série trouvée pour $\int dz(-lz)^n$ est toujours interrompue, & que le dernier terme seroit

$$n(n-1)(n-2)(n-3) \ldots\ldots 1 . z,$$

ou en renversant, $1 . 2 . 3 . 4 . 5 \ldots\ldots nz$. Mais tous les termes précédens seront multipliés par la puissance de $-lz$ même, & par conséquent ils évanouiront tous à l'exception du dernier, si au lieu de z on met l'unité. Nous aurons donc la valeur suivante pour

$$\int dz(-lz)^n = 1 . 2 . 3 . 4 . 5 \ldots\ldots n.$$

Ainsi, toutes les fois que n est un nombre entier, nous aurons le nombre absolu pour la valeur de $\int dz(-lz)^n$; & même tous ces nombres qui naissent de la formule $\int dz(-lz)^n$, si l'on pose successivement pour n tous les nombres entiers, constitueront une progression hypergéométrique; car ils seront

si $n =$	0,	1,	2,	3,	4,	5,	&c.
$\int dz(-lz)^n =$	1,	1,	1.2,	1.2.3,	1.2.3.4,	1.2.3.4.5,	&c.
ou $\int dz(-lz)^n =$	1,	1,	2,	6,	24,	120,	&c.

Or tout cela devient d'abord manifeste par l'équation ci-dessus trouvée,

$$\int dz(-lz)^n = z(-lz)^n + n\int dz(-lz)^{n-1},$$

laquelle, si, dans le terme absolument intégrable, on pose pour z l'unité, se change en celle-ci,

$$\int dz(-lz)^n = n\int dz(-lz)^{n-1}.$$

Mais,

Mais, si dans cette équation on pose successivement pour n tous les nombres entiers, comme quand $n = 0$, $\int dz(-lz)^0 = z$ devient $= 1$, parce qu'après l'intégration nous posons $z = 1$, nous aurons.

$$
\begin{array}{lll}
\text{si } n = 1; & \int dz(-lz)^1 = 1\int dz(-lz)^0 = 1 = 1 \\
n = 2; & \int dz(-lz)^2 = 2\int dz(-lz)^1 = 1.2 = 2 \\
n = 3; & \int dz(-lz)^3 = 3\int dz(-lz)^2 = 1.2.3 = 6 \\
n = 4; & \int dz(-lz)^4 = 4\int dz(-lz)^3 = 1.2.3.4 = 24 \\
n = 1; & \int dz(-lz)^5 = 5\int dz(-lz)^4 = 1.2.3.4.5 = 120, \\
\&c. & \&c.
\end{array}
$$

qui sont les mêmes nombres que nous avons trouvés ci-dessus.

Ainsi notre valeur desirée n'est autre chose que le terme qui dans la même progression répond à l'indice $n = -\frac{1}{2}$. D'où s'ensuit que tout à présent se réduit à ce que nous nous efforcions de dégager ce terme par l'interpolation.

Posons dans ce dessein que x soit le terme de cette série hypergéometrique qui répond à l'indice $-\frac{1}{2}$, & par conséquent la valeur même de notre formule intégrale proposée: donc, par la nature de la série hypergéométrique, en vertu de laquelle chaque terme dont l'indice surpasse d'une unité l'indice du terme précédent, est égal au terme précédent multiplié par l'indice du suivant, on aura

le terme qui répond à l'indice $-\frac{1}{2} = x$,

le terme qui répond à l'indice $+\frac{1}{2} = \frac{1}{2}x$,

le terme qui répond à l'indice $+\frac{3}{2} = \frac{1.3}{2.2}x$,

le terme qui répond à l'indice $+\frac{5}{2} = \frac{1.3.5}{2.2.2}x$,

le terme qui répond à l'indice $+\frac{7}{2} = \frac{1.3.5.7}{2.2.2.2}x$,

&c.

 Nous

Nous aurons donc les valeurs de $\int dz\,(-lz)^n$ même, qu'elle revêt si, au lieu de n, on écrit tous les nombres qui croissent de la moitié d'une unité; & ils seront,

si $n=0$; $\int dz(-lz)^0 = 1$	$n=-\frac{1}{2}$; $\int dz(-lz)^{-\frac{1}{2}} = x$,
$n=1$; $\int dz(-lz)^1 = 1$	$n=+\frac{1}{2}$; $\int dz(-lz)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\,x$,
$n=2$; $\int dz(-lz)^2 = 1.2$	$n=1+\frac{1}{2}$; $\int dz(-lz)^{\frac{3}{2}} = \frac{1.3}{2.2}\,x$,
$n=3$; $\int dz(-lz)^3 = 1.2.3$	$n=2+\frac{1}{2}$; $\int dz(-lz)^{\frac{5}{2}} = \frac{1.3.5}{2.2.2}\,x$,
$n=4$; $\int dz(-lz)^4 = 1.2.3.4$	$n=3+\frac{1}{2}$; $\int dz(-lz)^{\frac{7}{2}} = \frac{1.3.5.7}{2.2.2.2}\,x$,
	$n=4+\frac{1}{2}$; $\int dz(-lz)^{\frac{9}{2}} = \frac{1.3.5.7.9}{2.2.2.2.2}\,x$,

&c.

Et en général, si n est un nombre quelconque entier,

le terme qui répond à l'indice n sera $= 1,2.3.4.5 \ldots\ldots n$,

le terme qui répond à l'indice $n+\frac{1}{2} = \frac{1.3.5.7.9.11}{2.2.2.2.2.2} \ldots (2n+1)x$,

le terme qui répond à l'indice $n+1 = 1.2.3.4.5 \ldots n(n+1)$.

Mais, si n est un nombre infini, il est manifeste par le caractere de la série, que les termes qui répondent aux indices n, $n+1$, $n+2$, &c. suivront une progression géométrique. C'est pourquoi le terme qui répond à l'indice $n+\frac{1}{2}$ sera moyen proportionnel entre les termes qui répondent aux indices n & $n+1$. Ainsi nous en tirerons l'équation suivante par laquelle le nombre x même peut être défini.

1.3.5.7

$$\frac{1.3.5.7\ldots(2n+1)}{2.2.2.2\ldots\ldots 2}x = \sqrt{1.2.3.4\ldots n.1.2.3.4\ldots n(n+1)},$$

ou

$$\frac{1.3.5.7\ldots(2n+1)}{2.2.2.2\ldots\ldots 2}x = 1.2.3.4\ldots\ldots n.\sqrt{(n+1)};$$

D'où nous obtenons la valeur de x même,

$$x = \frac{2.4.6.8\ldots\ldots\ldots 2n.2\sqrt{(n+1)}}{1.3.5.7\ldots\ldots(2n-1)(2n+1)},$$

& en prenant les quarrés,

$$xx = \frac{2.2.4.4.6.6.8.8\ldots\ldots 2n.\ 2n.\ (4n+4)}{1.3.3.5.5.7.7.9\ldots(2n-1)(2n+1)(2n+1)},$$

ou

$$\frac{xx}{2} = \frac{2.2.4.4.6.6.8.8\ldots\ldots 2n.\ 2n.\ (2n+2)}{1.3.3.5.5.7.7.9\ldots(2n-1)(2n+1)(2n+1)}.$$

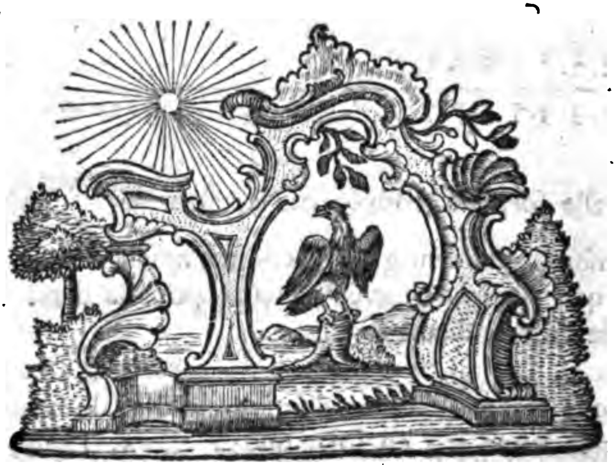
Laquelle formule trouvée par la valeur de $\frac{xx}{2}$ même, quand n eſt un nombre infiniment grand, comme nous l'avons auſſi ſuppoſé, eſt la même que Wallis a trouvée autrefois pour la demi-circonférence d'un cercle dont le diametre $= 1$.

Si donc la circonférence d'un cercle dont le diametre $= 1$, indiquée par la lettre π, en ſorte que $\pi = 3, 1415926535$ &c. nous aurons cette équation $\frac{xx}{2} = \frac{\pi}{2}$, par laquelle on trouve x, c'eſt à dire la valeur de $\int\frac{dz}{\sqrt{-lz}}$, en poſant après l'intégration $z = 1$; laquelle valeur ſera $\int\frac{dz}{\sqrt{-lz}} = \sqrt{\pi}$; de ſorte que le

tems

tems de la deſcente du corps attiré au centre de forces, en raiſon ſimple réciproque des diſtances par l'eſpace a depuis le centre, eſt $= \frac{a\sqrt{\pi}}{\sqrt{f}}$, f dénotant la diſtance où la force centripete eſt égale à la gravité.

Que ſi l'on veut ramener cette formule à une meſure abſolue, qu'on introduiſe la hauteur par laquelle un corps peſant tombe librement dans une ſeconde, laquelle ſoit g; & comme le tems de la chûte défini par les mêmes principes ſe trouve $2\sqrt{g}$, le tems que nous cherchons, exprimé en ſecondes, ſera $= \frac{a\sqrt{\pi}}{2\sqrt{fg}}$.



DU

DU

MOUVEMENT D'UN GLOBE

SUR

UN PLAN HORIZONTAL,

*MÉMOIRE SECOND *)*.

PAR M. J. A. EULER.

Ayant eu, il y a quelque tems, l'honneur de présenter à l'Académie un Mémoire, où j'ai considéré le mouvement d'un globe sur un plan horizontal, j'y avois bien égard au frottement, mais je faisois abstraction tant de la résistance de l'air que de tous les autres obstacles qui, outre le frottement proprement dit, s'opposent au mouvement. Or on entend par frottement proprement dit cette force constante & proportionelle à la pression du corps mouvant, qui, selon une direction contraire au mouvement, commence & s'éteint subitement avec lui.

Je trouvai alors que le mouvement du globe, quelque irrégulier qu'il fût au commencement, se change toujours après un certain tems dans un mouvement rotatoire parfait; c'est à dire, où la vitesse de rotation au point d'attouchement du globe sur le plan est égale & contraire à la vitesse progressive. C'est donc alors, parce que le frottement y évanouit tout à fait, que le mouvement du globe ne devroit plus être assujetti à aucune rétardation, & partant durer à l'infini, s'il n'éprouvoit point d'autres obstacles.

Or l'expérience ne nous apprend que trop le contraire: & l'on sait qu'un globe, qui se meut sur un plan très poli, perd bientôt tout

*) Voyez le premier, Tom. XIV. p. 284.

ſon mouvement & eſt réduit en repos. Comme cette extinction du mouvement ne ſauroit être l'effet du frottement, il faut bien qu'il y ait encore d'autres obſtacles qui s'oppoſent au mouvement du globe, & auxquels il ſemble qu'on n'ait pas encore aſſez réfléchi.

On comprend aiſément que la ſeule réſiſtance de l'air n'eſt pas capable de produire cet effet; puisqu'on ſait que, dans aucun cas, une réſiſtance qui eſt proportionelle au quarré de la viteſſe, ne ſauroit éteindre tout à fait le mouvement.

Il s'agit donc de rechercher les autres obſtacles que le globe rencontre dans ſon mouvement, enfin de découvrir la véritable cauſe qui réduit à la fin le globe en repos. Ce ſera le ſujet de mes recherches préſentes: je commencerai par examiner plus ſoigneuſement, quel effet la réſiſtance de l'air doit produire ſur le mouvement du globe, où j'aurai occaſion de faire remarquer un paradoxe bien important ſur la combinaiſon du frottement avec la réſiſtance de l'air, & qui ſemble bien mériter toute notre attention.

Enſuite je conſidérerai l'impreſſion que le globe fait ſur le plan lui-même, en s'y enfonçant tant ſoit peu; & je ferai voir que c'eſt ici qu'il faut chercher la véritable cauſe de l'extinction entiére du mouvement. Or tant d'expériences ne nous laiſſent pas douter, que, quelques durs que ſoient deux corps, lorsqu'on les preſſe l'un contre l'autre, il ſe faſſe dans chacun un petit enfoncement proportionné à la preſſion; il faut donc bien que le même effet arrive lorsqu'un globe roule ſur un plan horizontal, auquel il eſt preſſé par ſon poids. Après avoir tenu compte de cette circonſtance, on verra que la Théorie eſt parfaitement d'accord avec les phénomenes; auſſi ne ſauroit-on imaginer une autre cauſe, à l'action de laquelle le globe pourroit être aſſujetti.

PREMIERE PARTIE.

1. Quant à l'effet de la réſiſtance de l'air, je remarque d'abord, qu'il dépend uniquement du mouvement progreſſif du globe,

que

que sa direction passe toujours par le centre du globe, & qu'elle est contraire à celle mouvement du centre. Or, pour trouver la quantité de cette résistance, si nous posons la vitesse du centre $= \sqrt{v}$, ou bien que v soit la hauteur due à cette vitesse, on estime la résistance de l'air égale au poids d'un cylindre d'air dont la base seroit le grand cercle du globe, & la hauteur $= v$; ce seroit proprement, selon la commune opinion, la résistance qu'éprouveroit le grand cercle du globe étant mû avec la même vitesse, & il semble que celle du globe devroit être posée deux fois plus petite. Mais l'expérience nous apprend que la résistance de l'air doit être estimée deux fois plus grande que selon cette regle commune, & partant égale à celle, que cette regle donne pour le grand cercle. Donc, si nous posons le rayon du globe $= a$, & la raison du diametre à la périphérie comme 1 à π, la résistance qu'éprouve le globe en se mouvant par l'air sera égale au poids d'un volume d'air $= \pi aav$. Ou bien, si nous posons la masse du globe $= M$, & que $\frac{1}{m}M$ soit égal au poids d'un globe d'air du même volume, parce que le volume du globe est $= \frac{4}{3}\pi a^3$, la résistance cherchée sera $= \frac{3Mv}{4ma}$.

2. Or, pour ne pas embrouiller cette recherche par des calculs trop embarrassans, je ne considérerai que le cas où l'axe de rotation du globe est horizontal & perpendiculaire à la direction du mouvement du centre, en supposant toujours que le mouvement se fait sur un plan horizontal. Qu'on ait donc imprimé au globe, au commencement, lorsqu'il fût encore en A, un mouvement tel, que la vitesse du centre O selon OB, parallele au plan AE, soit due à la hauteur b, & la vitesse de rotation dans l'équateur du globe ABCD, l'axe de rotation étant en O, & perpendiculaire à la figure, due à la hauteur c; supposons encore que la rotation se fait en avant dans le sens ADCB, & en cas que la rotation se faisoit en arriere dans le sens ABCD, on n'auroit qu'à prendre la vitesse $\sqrt{c}$ négative. Posons pour abréger la vitesse OB ou AE $= \sqrt{b} = \beta$, & celle selon

Planche VI. Fig. 1.

A

ADCB ou $Ae = \sqrt{c} = \gamma$, & le point A du globe étant porté par ces deux vitesses, il y aura deux cas à distinguer, selon que la vitesse $\mathfrak{G}$ est ou plus grande ou plus petite que γ. Nous verrons dans la suite que l'un & l'autre cas se changent après un tems déterminé dans un troisieme, qui tient un milieu entr'eux, & où $\mathfrak{G} = \gamma$.

II.

PREMIER CAS

où $\mathfrak{G} > \gamma$.

3. Soit donc premierement $\mathfrak{G} > \gamma$, & que le globe après un tems écoulé t soit parvenu en P, où sa vitesse du centre selon OQ soit $= \sqrt{v} = p$, & celle de rotation dans l'équateur ou dans le point P selon PSRQ $= \sqrt{u} = q$. Supposons qu'il soit encore $p > q$. Or la résistance de l'air agissant selon OS avec une force $= \frac{3Mv}{4ma} = \frac{3Mpp}{4ma}$, puisque le point P se meut par le mouvement progressif selon PE avec la vitesse p, & par le mouvement de rotation selon PF avec la vitesse $= q$, ce point P rasera encore le plan selon la direction PE avec une vitesse $= p - q$, & partant le frottement agira sur le point P dans le sens contraire PF; & comme cette force est proportionelle à la pression du globe M, posons la $= \lambda M$, de sorte que le mouvement progressif soit rétardé en tout par la force $\lambda M + \frac{3Mpp}{4ma}$, ce qui donne par les principes connus de la Mécanique $2dp = -\lambda dt - \frac{3ppdt}{4ma}$, ou bien $ds = \frac{-8madp}{4\lambda ma + 3pp}$. Ensuite, posant le moment d'inertie du globe $= Mkk$, parce que le frottement donne le moment λMa, la résistance de l'air n'entrant point ici en compte, le mouvement de rotation en sera accéléré de sorte que soit $2dq = \frac{\lambda aadt}{kk}$.

4. Donc

4. Donc, parce que depuis le commencement du mouvement la viteſſe progreſſive va toujours en diminuant, & celle de rotation toujours en augmentant, ces deux viteſſes doivent enfin s'égaler. Or, dès que cela arrive, le frottement évanouit, & les formules trouvées n'auront plus lieu; le globe commencera ſubitement à ſe mouvoir ſelon d'autres loix que je donnerai au troiſieme cas. Mais, pour trouver le tems où ce changement ſubit arrive, & où $\frac{4}{3}\lambda ma = aa$, de ſorte que nous ayons $dt = \frac{-8madp}{3(aa+pp)}$, & nous trouverons en intégrant $t = \frac{8ma}{3a}\left(\text{A. tang}\frac{\beta}{a} - \text{A. tang}\frac{p}{a}\right)$.

Et puisque l'autre équation $2dq = \frac{\lambda aadt}{kk}$

donne par l'intégration $2q - 2\gamma = \frac{\lambda aat}{kk}$,

ou bien $t = \frac{2kk(q-\gamma)}{\lambda aa}$,

en poſant $p = q$, & en égalant les deux valeurs trouvées pour t, nous aurons $\frac{3akk(q-\gamma)}{4\lambda ma^3} = \text{A. tang}\frac{\beta}{a} - \text{A. tang}\frac{q}{a}$, dont on ne ſauroit obtenir la valeur de q que par approximation. Cependant on voit que q aura toujours une valeur déterminée, d'où l'on trouvera le tems cherché, après lequel devient $p = q$, & qui ſera exprimé en ſorte $t = \frac{2k^2(q-\gamma)}{\lambda aa}$.

SECOND CAS
où $\beta < \gamma$.

5. Soit maintenant $\beta < \gamma$, & que cette même condition ait encore lieu après le tems t, lorsque le globe ſe trouve au point P; la viteſſe progreſſive $\sqrt{v} = p$, y ſera donc encore plus petite que la

la vitesse de rotation dans l'équateur $\gamma a = q$, & le point P rasera le plan selon la direction PF, de sorte que le frottement agit suivant la direction contraire PE, avec une force qui soit λM, & qui dans le cas présent accélérera le mouvement progressif, & retardera celui de rotation. Ensuite, l'air résistant au mouvement progressif du globe comme ci-dessus, suivant la direction OS, avec une force $= \frac{3Mpp}{4ma}$; nous obtiendrons pour le mouvement du globe les deux équations suivantes :

I. Pour le mouvement progressif $dt = \lambda dt - \frac{3ppdt}{4ma}$,

de là $dt = \frac{8madp}{4\lambda ma - 3pp}$,

& en posant $4\lambda ma = 3\alpha\alpha$, $dt = \frac{8madp}{3(\alpha\alpha - pp)}$,

dont l'intégrale est $t = \frac{4ma}{3\alpha} l \frac{(\alpha + p)(\alpha - \beta)}{(\alpha - p)(\alpha + \beta)}$.

II. Pour le mouvement de rotation $2dq = \frac{-\lambda aadt}{kk}$,

& en intégrant $2(\gamma - q) = \frac{\lambda aat}{kk}$,

de là $t = \frac{2kk(\gamma - q)}{\lambda aa}$,

de sorte que nous ayons $\frac{4ma}{3\alpha} l \frac{(\alpha + p)(\alpha - \beta)}{(\alpha - p)(\alpha + \beta)} = \frac{2kk(\gamma - q)}{\lambda aa}$.

6. Si β étoit plus petit que α ou $b < \frac{4}{3}\lambda ma$; p seroit toujours plus petit que α; de même, si $\beta > \alpha$, ou $b > \frac{4}{3}\lambda ma$, p demeureroit toujours plus grand que α, & on n'auroit $p = \alpha$,

qu'après

qu'après un tems infini. Or, quoiqu'il arrive, il y aura toujours à la fin $q = p$, & on obtient pour ce terme

$$\frac{3\alpha kk(\gamma - p)}{2\lambda m a^3} = l\frac{(\alpha - \beta)(\alpha + p)}{(\alpha + \beta)(\alpha - p)},$$

d'où il faut chercher par approximation la quantité p; laquelle étant trouvée, on tirera aisément le tems t, où $p = 0$, qui sera

$$t = \frac{2kk(\gamma - p)}{\lambda aa}.$$

Mais, dans le cas où $\beta = \alpha$, la valeur de p ne sera plus assujettie à aucune variation, & il y aura constamment $p = \alpha$; c'est à dire le mouvement progressif sera uniforme; or le mouvement rotatoire dans l'équateur lui deviendra égal après un tems écoulé

$$t = \frac{2kk(\gamma - \alpha)}{\lambda aa}.$$

Donc tous les deux cas que nous venons de développer se réduisent après un tems déterminé au cas $q = p$, dont la solution renferme des difficultés qui lui sont tout à fait particulieres, & dont je vais donner une évolution complette.

TROISIEME CAS
où $\beta = \gamma$.

7. Considérons donc le cas où $\beta = \gamma$, & si l'on faisoit abstraction de la résistance de l'air, le globe continueroit selon le calcul à rouler uniformement sur le plan. Mais la résistance de l'air produit un effet tout particulier. Au premier instant, il est clair que le globe ne ressent aucun frottement: or, dès qu'il se meut plus outre, la résistance de l'air le repoussant selon OS avec une force $= \frac{3Mp}{4ma}$, le mouvement progressif en sera rallenti, comme on le peut encore voir par les formules de ci-dessus. Mais, comme le mouvement de

 rota-

rotation n'en souffre cependant aucun changement, dès l'instant suivant le point P acquerra un mouvement selon PF, & toute la quantité du frottement λM lui résistera selon la direction contraire PE. Ensuite, le mouvement de rotation commencera aussi d'en sentir l'effet en devenant de plus en plus lent, jusqu'à ce qu'il redevienne égal au mouvement progressif. Maintenant, comme il se trouve au même cas qu'au commencement, il faudroit recommencer ces recherches de nouveau. Or une telle évolution instantanée, où le frottement devient alternativement, ou égal à zéro, ou subitement égal à λM, avanceroit très peu une parfaite connoissance du mouvement entier: d'ailleurs un tel développement étant trop périlleux & trop sujet aux faux pas, enfin très peu conforme aux principes de la Mécanique, il sera plus convenable de l'abandonner & d'entreprendre cette recherche d'une toute autre façon.

8. Je remarque d'abord que, le mouvement de rotation demeurant le même, le mouvement progressif ne sauroit être retardé par la résistance de l'air, sans que le point P en reçoive un mouvement, & en rasant le plan en ressente l'effet du frottement. Or cette force qui résulte du frottement étant contraire à la résistance de l'air, pourvu que celle-ci ne soit pas plus grande que le frottement total λM, elle en sera toujours détruite. Car c'est ici qu'il faudra faire remarquer, que le frottement doit être estimé tout autrement lorsqu'il attire un mouvement déjà produit que lorsqu'il s'oppose à un mouvement naissant; dans le premier cas, il est toujours, comme nous l'avons supposé jusqu'ici, d'une même grandeur, savoir λM, mais dans l'autre cas, comme il ne fait qu'empêcher le mouvement qui va naître, il doit être estimé égal à la force sollicitante, puisqu'il en empêche l'effet tant que cette force sollicitante ne surpasse pas la quantité λM. Et dès que la force sollicitante surpasse cette quantité λM, le frottement ne lui oppose plus que sa force naturelle λM, & agira alors sur le mouvement conformément aux regles établies, par lesquelles on pourra déterminer le mouvement dans ce cas. Il se présente donc deux

deux cas à confidérer, felon que la force qui agit au point P eft plus petite ou plus grande que λM.

9. Or, avant que d'entreprendre une évolution complette de ces deux cas, il nous conviendra de chercher de quelle quantité doit être une force qui agit felon PE, afin que le point P demeure en repos. Il eft clair qu'on trouvera cette force requife en pofant les accroiffemens des deux viteffes β & γ (qui font égales entr'elles) auffi égaux entr'eux.

Soit donc la force PE que nous cherchons $= Mz$, & comme la force née de la réfiftance de l'air felon OS eft $= \frac{3M\beta\beta}{4ma}$, nous en trouverons les accroiffemens des viteffes fuivans:

$$2d\beta = zdt - \frac{3\beta\beta dt}{4ma}, \quad \& \quad 2d\gamma = \frac{-aazdt}{kk}.$$

Donc, afin que ces deux accroiffemens deviennent égaux entr'eux, nous trouvons $z = \frac{3\beta\beta kk}{4ma(aa+kk)}$, de forte que la force PE requife pour tenir le point P en repos eft $= \frac{3M\beta\beta kk}{4ma(aa+kk)}$.

Tandis donc que cette force eft plus petite que λM, le frottement fournira lui-même très amplement cette force, & empêchera par là que le point P rafe le plan. Or fi la force trouvée eft plus grande que λM, le frottement ne la fauroit plus fournir, & partant il nous faudra mettre au lieu de la force PE une force plus petite λM, laquelle ne pouvant plus retenir le point P en repos, ce point P commencera en effet à fe mouvoir en arriere. Dévelopons maintenant l'un & l'autre cas en particulier.

I.

10. Soit premierement $\frac{3\mathfrak{G}\mathfrak{G}kkM}{4ma(aa+kk)} < \lambda M$, ou $\mathfrak{G}\mathfrak{G} < \frac{4\lambda ma(aa+kk)}{3kk}$, puisque le point P ne souffre aucun frottement, & partant le mouvement du centre & celui de rotation décroissent également, ces deux mouvemens demeureront toujours égaux entr'eux, & le globe roulera d'un mouvement rotatoire rallenti. Savoir, si après un tems écoulé t la vitesse du centre est $= p$, on a aussi la vitesse de rotation dans l'équateur $= p$, & à cause de la force selon $PE = \frac{3Mkkpp}{4ma(aa+kk)}$,

on obtiendra pour le mouvement du globe

$$2dp = \frac{-3appdt}{4m(aa+kk)},$$

ou bien $\frac{2dp}{pp} = \frac{-3adt}{4m(aa+kk)}$,

& en intégrant $\frac{2}{\mathfrak{G}} - \frac{2}{p} = \frac{-3at}{4m(aa+kk)}$

& de là $p = \frac{8m\mathfrak{G}(aa+kk)}{8m(aa+kk)+3\mathfrak{G}at}$.

Les deux vitesses du globe décroissent donc également de plus en plus, mais elles n'évanouiront tout à fait qu'après un tems infini.

II.

11. Or, s'il y a au commencement $\frac{3\mathfrak{G}\mathfrak{G}kkM}{4ma(aa+kk)} > \lambda M$, ou $\mathfrak{G}\mathfrak{G} > \frac{4\lambda ma(aa+kk)}{3kk}$, le mouvement de rotation surpassera bientôt celui du centre; savoir, quand même il y auroit $\gamma = \mathfrak{G}$, on

on aura, après un tems écoulé t, $q > p$, & le frottement agira selon PE avec toute sa force $= \lambda M$.

On obtiendra donc les deux équations suivantes:

$$2\,dp = \lambda dt - \frac{3pp\,dt}{4ma},$$

$$2\,dq = \frac{-\lambda aa\,dt}{kk}.$$

D'où en intégrant, & posant comme ci-dessus (5)

$$\tfrac{4}{3}\lambda ma = \alpha\alpha, \quad \text{à cause de } \beta\beta > \frac{\alpha\alpha(aa + kk)}{kk},$$

ou $\beta > \alpha$; si nous posons qu'il soit encore $p > \alpha$, nous obtiendrons cette double valeur pour t:

$$t = \frac{4ma}{3\alpha}\, l\, \frac{(p + \alpha)(\beta - \alpha)}{(p - \alpha)(\beta + \alpha)} = \frac{2kk(\beta - q)}{\lambda aa},$$

12. Comme la vitesse p décroit, & qu'elle ne sauroit être diminuée au de là du limite α, la vitesse q décroissant en attendant beaucoup plus vite, on aura avec le tems encore une fois $q = p$, de sorte qu'il faudra alors recommencer la recherche de nouveau; savoir, si $\frac{3ppkkM}{4ma(aa + kk)} < \lambda M$, on se servira des préceptes donnés au §. 10. & si $\frac{3ppkk}{4ma(aa + kk)} > \lambda$, on se servira de ceux du §. précédent. Mais nous allons voir que ce dernier cas ne sauroit plus avoir lieu, de sorte que le globe finit par se mouvoir selon les préceptes donnés au §. 10.

13. Puisqu'on a dès le commencement $q > p$, & qu'ensuite il devient derechef $q = p$, il est nécessaire que pendant cet espace de tems la différence entre q & p devienne la plus grande; ce qui arri-

arrivera effectivement lorsque $dq - dp = 0$, & partant lorsque $pp = \frac{4\lambda ma(aa + kk)}{3kk}$, ou $pp = \frac{aa(aa + kk)}{kk}$. De là on voit que, puisque la vitesse p continue à décroitre, lorsqu'il y aura encore une fois $p = q$, il faudra qu'il soit

$$pp < \frac{4\lambda ma(aa + kk)}{3kk}:$$

de sorte que le mouvement du globe ne sera plus assujetti à aucun changement, mais qu'il commencera dès ce moment à être conforme aux formules du §. 10. Le globe continuera donc de rouler sur le plan, de maniere qu'il y ait toujours $q = p$, & tant son mouvement progressif que celui du centre décroitront également, mais ils n'évanouiront tout à fait qu'après un tems infini. D'ailleurs cet espace de tems, pendant lequel le globe se meut en rasant le plan depuis le commencement où $\gamma = \beta$, jusqu'à ce qu'il devienne derechef $q = p$ est bien à remarquer, & il sera convenable de développer un cas particulier.

14. Je supposerai donc que le globe qui soit composé d'une matiere homogene, soit 4000 fois plus pesant qu'un globe d'air du même volume, de sorte qu'on ait $m = 2000$, & $kk = \frac{2}{5}aa$. Ensuite, soit pour le frottement $\lambda = \frac{1}{3}$, & on obtiendra

$$\frac{4\lambda ma(aa + kk)}{3kk} = 3111\tfrac{1}{9}a.$$

Posons maintenant que le globe ait au commencement reçu un mouvement tel que, tant sa vitesse progressive que celle de rotation dans l'équateur soit due à la hauteur $6480a$, pour avoir $\beta = \gamma = 36\sqrt{5a}$, & à cause de $\alpha\alpha = \frac{8000}{9}a$, & $\alpha = \frac{40}{3}\sqrt{5a}$, on trouvera (11),

$$t = 40\sqrt{5a}\, l\frac{(3p + 40\sqrt{5a})(36 - \frac{40}{3})}{(3p - 40\sqrt{5a})(36 + \frac{40}{3})} = \tfrac{12}{5}(36\sqrt{5a} - q)$$

Soit

Soit $p = x\sqrt{5a}$, & $q = y\sqrt{5a}$, de forte que nous ayons

$$t = 40\sqrt{5a}\; l\,\frac{17(3x+40)}{37(3x+40)} = \frac{12\sqrt{5a}}{5}(36-y),$$

& pour trouver le tems où il arrive que $p = q$, ou bien que $x = y$, on aura à réfoudre cette équation

$$l\,\frac{17(3x+40)}{37(3x-40)} = \frac{3(36-x)}{50}.$$

15. La différence entre p & q eft la plus grande lorfque $pp = \frac{28000}{9}a$, ou $p = \frac{20}{3}\sqrt{70a}$, & partant lorfque $x = \frac{20}{3}\sqrt{14}$: de forte que, pour le moment où $p = q$, il y aura $x < \frac{20}{3}\sqrt{14}$, ou bien $x < 25$, & puifque $3x - 40$ doit être une quantité affirmative, nous apprennons encore que $x > 13\frac{1}{3}$: ce qui nous aidera à chercher la valeur de x de l'équation du §. précédent, fachant maintenant que cette valeur doit être contenue entre les limites $13\frac{1}{3}$ & 25. Or les logarithmes qui entrent dans ce calcul étant des logarithmes hyperboliques, afin que nous puiffions nous fervir des logarithmes tabulaires, nous devons changer notre équation en celle-ci

$$2,30258509\, l\,\frac{17(3x+40)}{37(3x-40)} = \tfrac{3}{50}(36-x),$$

ou $36 - x = 38,376418\; l\,\frac{17(3x+40)}{37(3x-40)}$, ou bien encore

$$48,96175 - x = 38,376418\; l\,\frac{3x+40}{3x-40},$$

laquelle fera la plus propre pour trouver la valeur de x par approximation; ce qui fe fera par les fuppofitions fuivantes

s'il étoit $x = 20$, on obtiendroit $28,96175 = 26,824$

s'il étoit $x = 19$, on obtiendroit $29,96175 = 29,02497$, &

s'il étoit $x = 18$, on obtiendroit $30,96175 = 31,73730$.

De

De là on conclut la vraye valeur pour $x = 18,453$, & partant $p = 18,453\sqrt{5a}$; $pp = v = 1702,56a$, & enfin

$$t = 42,113\sqrt{5a}.$$

Pour réduire cette valeur aux mesures vulgaires du tems, soit g la hauteur par laquelle un corps grave tombe dans une seconde, & on aura $t = 21,057\sqrt{\frac{5a}{g}}$ secondes:

Donc, g étant $= 15,625$ pieds du Rhin, si nous posons $a = \frac{1}{10}$ pied, nous trouverons $t = 2,779$ secondes.

16. Comme cette vitesse $v = 1702,56a$, est plus petite que le limite trouvé au §. 15. $3111\frac{1}{9}a$; le globe commencera dès-lors à rouler avec un mouvement rotatoire continuellement rallenti selon les loix trouvées au §. 10. Pour en donner un exemple, soit comme ci-dessus $m = 2000$, $\lambda = \frac{1}{5}$, & $kk = \frac{2}{5}aa$; ensuite que l'une & l'autre vitesse du globe soit due à la hauteur b; on, pour réduire d'abord toutes les quantités à des mesures absolues, si g est la hauteur par laquelle un corps grave tombe dans une seconde, la vitesse du globe répondra à l'espace $= 2\sqrt{bg}$ par seconde. Donc, après un tems t, la vitesse du mouvement tant progressif que rotatoire du globe sera $= \frac{112000a\sqrt{b}}{112000a + 15t\sqrt{b}}$. Et si l'on demande quelle sera la vitesse du globe après n secondes, on n'aura qu'à poser pour t sa valeur de $2n\sqrt{g}$, & la vitesse du globe sera encore si grande qu'il en pourra parcourir dans une seconde l'espace

$$\frac{22400a\sqrt{bg}}{11200a + 3n\sqrt{bg}}.$$

Par conséquent, si la vitesse au commencement répond à l'espace de c pieds par seconde; après n secondes la vitesse du globe ne répondra plus qu'à $\frac{22400ac}{22400a + 3nc}$ pieds par secondes, & partant la vitesse

sera

sera décrue jusqu'à la moitié, c'est à dire, jusqu'à $\frac{1}{2}a$ après $\frac{22400a}{3c}$ secondes.

17. D'où l'on voit que, quand même on introduit au calcul la résistance de l'air, & qu'on l'estime selon la maniere ordinaire, comme nous l'avons fait au §. 1; le globe gardera toujours, après un tems quelque grand qu'il soit, encore un reste de mouvement, & que ce mouvement ne s'éteindra qu'après un tems véritablement infini.

Par exemple, soit $c = 10$ pieds, & $a = \frac{1}{10}$ pieds, de sorte qu'après x secondes la vitesse du globe soit encore

$$\text{de } \frac{2240}{224 + 3x} \text{ pieds par seconde,}$$

& partant

après le tems de			la vitesse sera de
min.			pieds par seconde.
1	=	60	5, 544
2	=	120	3, 835
3	=	180	2, 932
4	=	240	2, 373
5	=	300	1, 993
10	=	600	1, 106
15	=	900	0, 766
30	=	1800	0, 398
60	=	3600	0, 212

De sorte que, dans l'espace d'une heure entiere, le globe aura encore conservé quelque mouvement.

18. Mais comme en effet & selon les expériences le mouvement du globe sur un plan horizontal s'éteint bientôt tout à fait, il nous reste de rechercher la cause de ce phénomene, qui, comme nous venons de voir, ne sauroit être l'effet ni de la résistance de l'air ni du frottement

ment proprement dit. Car; quant à la résistance de l'air, il n'y a point de doute que les formules que nous en avons tirées, ne soient conformes & à la vérité & aux expériences.

Il est bien vrai que les Physiciens ont observé, que pour des vitesses extrèmement petites, la résistance de l'air doit à proportion être estimée un tant soit peu plus grande que pour les vitesses médiocres; laquelle augmentation est attribuée à la ténacité de l'air: de sorte qu'il nous auroit fallu ajouter une certaine, mais très petite, quantité constante à la résistance de l'air surtout lorsque le globe commence à se mouvoir lentement. Or je doute que cette petite augmentation introduite au calcul nous eût expliqué la cessation du mouvement: elle est trop petite pour ne pouvoir pas être négligée à l'égard de la résistance de l'air, comme nous l'avons exprimé dans notre calcul.

D'ailleurs, quand même on feroit mouvoir un globe sur un plan horizontal inclus dans un récipient dont on ait tiré l'air, il me semble que je pourrois avouer hardiment que son mouvement s'éteindroit néanmoins très vite. De sorte que, puisqu'on ne sauroit en aucune façon faire consentir le calcul avec l'expérience, ni par la résistance de l'air ni par le frottement proprement dit, la cause en doit absolument être située dans le plan même sur lequel le globe se meut; ce que je vais examiner dans cette seconde Partie.

SECONDE PARTIE.

19. En effet, si nous examinons avec attention le mouvement d'un globe sur un plan horizontal, il ne nous sera pas difficile de découvrir dans son roulement, outre le frottement & la résistance de l'air, encore un autre obstacle né de l'impression du globe dans le plan: Savoir, en faisant réflexion que tant le globe que le plan sont des corps ni parfaitement durs ni parfaitement élastiques, lorsque le globe se meut sur le plan, quelque dur que soit ce plan, le globe y fera toujours par son poids une impression de sorte que le point qui en se mouvant entre pour ainsi parler dans le plan, en souffre réciproquement une

réaction

réaction & comme cette nouvelle force de réaction: passe par le centre du globe O, sa direction étant oblique, il en naitra une force qui sollicite le globe en arriere selon la direction OS.

Il nous faudra donc encore ajouter au frottement; comme nous l'avons estimé jusqu'ici, une petite force qui sollicite le globe selon la direction OS contraire au mouvement, & qui sera d'autant plus petite que le plan sur lequel le mouvement se fait est plus dur, cette force encore n'évanouira qu'avec le mouvement même.

20. Comme cette force qu'on doit ajouter au frottement est constante, on la peut très aisément combiner avec l'autre particule constante dont j'ai fait mention au §. 18. & qui doit être ajoutée à la résistance de l'air. De sorte que la force de ci-dessus (§. 10) $\frac{3app}{4m(aa+kk)}$ par laquelle le mouvement rotatoire du globe est retardé, doit encore être augmentée d'une certaine particule constante, que je nommerai δ, & qu'il sera permis de négliger dans les mouvemens rapides, mais aussi dont l'effet sera d'autant plus considérable que le mouvement du globe sera devenu plus lent. Et ce sera de cette maniere, en ayant égard à la particule δ, que nous trouverons le parfait consentement du calcul d'avec l'expérience.

21. Or on aura pour la rétardation du mouvement rotatoire

$$2\,dp = -\delta dt - \frac{3appdt}{4m(aa+kk)},$$

c'est l'équation dont je me suis servi au §. 10; comme il y s'agit des mouvemens lents, j'y ai supposé la vitesse initiale due à la hauteur $\mathfrak{C}$ plus petite que $\frac{4\lambda ma(aa+kk)}{3kk}$. On obtiendra donc de cette équation

$$-dt = \frac{8m(aa+kk)dp}{4\delta m(aa+kk)+3app},$$

 la-

laquelle en posant pour abréger $4\delta m(nn + kk) = 3\lambda aa$, se change en $-\frac{\delta dt}{2a} = \frac{a\,dp}{aa + pp}$, dont l'intégrale est

$$\frac{\delta t}{2a} = \text{A tang}\,\frac{\mathfrak{C}}{a} - \text{A tang}\,\frac{p}{a},$$

d'où l'on voit que, posant $p = o$, le globe arrive effectivement au repos après un tems écoulé $t = \frac{2a}{\delta}\,\text{A. tang}\,\frac{\mathfrak{C}}{a}$; or a est $= 2\sqrt{\frac{\delta m(aa + kk)}{3\lambda}}$. Il est donc clair que, quelque petite que soit la particule δ dont on doit augmenter la résistance de l'air, le mouvement du globe s'éteindra pourtant conformément à l'expérience après un tems fini.

22. Pour réduire ces formules à des mesures absolues, soit g la hauteur par laquelle un corps grave tombe dans une seconde, soit encore c l'espace parcouru dans une seconde par une vitesse égale à celle que le globe a reçu au commencement, ou soit $\mathfrak{C} = \frac{c}{2\sqrt{g}}$.

Ensuite, supposant que le mouvement du globe s'éteint après n secondes, il faudroit qu'il soit $t = 2n\sqrt{g}$, & notre équation réduite à des mesures absolues obtiendra la forme suivante

$$2n\sqrt{g} = \frac{2a}{\delta}\,\text{A tang}\,\frac{c}{2a\sqrt{g}},$$

de sorte que le tems de la durée du mouvement du globe sera exprimé en secondes de cette façon

$$n = \frac{a}{\delta\sqrt{g}}\,\text{A tang}\,\frac{c}{2a\sqrt{g}},$$

ou

ou bien, en substituant pour a la valeur qu'on lui a donnée au §. 20, on trouvera

$$u = 2\sqrt{\frac{m(aa + kk)}{3\delta ag}}\ \text{A tang}\ \frac{c\sqrt{3a}}{4\sqrt{\delta m(aa + kk)g}},$$

où il faut remarquer que g dénote 15,625 pied du Rhin.

23. Comme l'arc du cercle qui entre dans nos formules ne sauroit surpasser le quadrant ou $\frac{\pi}{2}$; quelque vite qu'ait été le mouvement du globe au commencement, pourvu qu'il n'ait pas excedé son limite indiqué au §. 21, tout son mouvement s'éteindra encore avant

$$\pi\sqrt{\frac{m(aa + kk)}{3\delta ag}}\ \text{secondes,}$$

Donc, en faisant des expériences, si nous observons combien de secondes s'écoulent jusqu'à ce que le mouvement le plus vite s'éteint, nous en pourrons conclurre la valeur de la particule δ, & pour divers plans, & pour divers globes.

24. Au reste il se présente ici une question très importante, savoir, le plan avec les autres circonstances demeurant les mêmes, si la particule δ est constante, ou si elle dépend de la grandeur & du poids du globe? Elle seroit constante si cette autre force qu'on doit ajouter à la résistance de l'air, étoit proportionelle au poids du globe, ce qui paroit assez conforme à la vérité. D'ailleurs on ne sauroit ici rien déterminer ni par des calculs ni par des spéculations; mais il conviendroit de faire plusieurs expériences & d'en conclurre pour chaque cas la valeur de la particule δ.

25. Si δ étoit une quantité constante, la durée du mouvement seroit d'autant plus grande que le globe seroit & plus grand & plus pesant. Or, pour rendre ceci plus clair & plus intelligible, servons nous d'un exemple. Soit $m = 2000$, ou posons que le globe soit

soit 2000 fois plus pesant que l'air. Ensuite, le globe étant composé d'une matiere homogene, nous aurons encore $kk = \frac{2}{5} aa$, & partant

$$n = 40 \sqrt{\frac{7a}{3\delta g}} \cdot \text{A tang} \frac{c\sqrt{3}}{89\sqrt{7\delta a g}}.$$

De plus, posons $c = 10$ pieds, $a = \frac{1}{10}$ pieds, & à cause de $g = 15,625$ pieds, nous trouverons

$$n = \frac{16}{5} \sqrt{\frac{7}{3\delta}} \text{ A. tang } \frac{1}{10} \sqrt{\frac{3}{7\delta}}$$

Maintenant δ étant très petit, si nous posons que cette particule de la résistance devient égale à l'autre lorsque la vitesse du globe fait $\frac{1}{10}$ pieds par seconde, nous trouverons à peu près $\delta = \frac{1}{1000000}$, & si nous posons la même chose lorsque la vitesse du globe répond à 1 pieds par seconde, nous aurons $\delta = \frac{1}{10000}$.

Or cette valeur semble être trop grande pour un plan bien poli, & trop petite pour un plan rude.

26. Feignons quelques valeurs pour δ, & cherchons pour chaque cas la durée du mouvement.

Soit $\sqrt{\frac{3}{7\delta}} = e$, de sorte que soit $\delta = \frac{3}{7ee}$, &

$$n = \frac{112 \cdot e}{15} \text{ A tang } \frac{e}{10}.$$

Et

Et nous aurons pour les positions suivantes les valeurs correspondantes pour n contenues dans cette Table

ε	δ	n		
10	$\frac{3}{700}$	$\frac{112}{15}\cdot\varepsilon A$ tang 1	=	58″, 64
20	$\frac{3}{2800}$	$\frac{112}{15}\cdot\varepsilon A$ tang 2	=	165, 34
30	$\frac{3}{6300}$	$\frac{112}{15}\cdot\varepsilon A$ tang 3	=	279, 76
40	$\frac{3}{11200}$	$\frac{112}{15}\cdot\varepsilon A$ tang 4	=	378, 62
50	$\frac{3}{17500}$	$\frac{112}{15}\cdot\varepsilon A$ tang 5	=	512, 75
60	$\frac{3}{25200}$	$\frac{112}{15}\cdot\varepsilon A$ tang 6	=	629, 80
70	$\frac{3}{34300}$	$\frac{112}{15}\cdot\varepsilon A$ tang 7	=	746, 96
80	$\frac{3}{44800}$	$\frac{112}{15}\cdot\varepsilon A$ tang 8	=	864, 09
90	$\frac{3}{56700}$	$\frac{112}{15}\cdot\varepsilon A$ tang 9	=	981, 29
100	$\frac{3}{70000}$	$\frac{112}{15}\cdot\varepsilon A$ tang 10	=	1098, 50

C'est pourquoi, si l'on observoit par exemple, le tems de la durée du mouvement de $3' = 180''$, on trouveroit réciproquement $\varepsilon = 21{,}28$, & partant $\delta = \frac{1}{1054}$ laquelle valeur devient égale à l'autre partie de la résistance, savoir celle qui dépend de la vitesse, lorsque la vitesse du globe est due à la hauteur de $\frac{112}{317}$ pieds, ou bien lorsque la vitesse répond à $4\frac{7}{10}$ pieds par seconde.

27. Il paroit hors de doute qu'aux jeux de *Billard* la particule δ doit être estimée encore plus grande que nous ne l'avons supposée dans la table précédente, parce que les billes, avec quelque force qu'on les pousse, ne gardent cependant leur mouvement que pendant peu de secondes: il est bien vrai qu'elles perdent beaucoup de leur mouvement par les réflexions des bandes; cependant, quand même on ôteroit la bande, je doute fort si la bille se mouvroit pendant une minute entiere. Peut-être la particule δ ne surpassera-t-elle pas même $\frac{1}{200}$ ou encore $\frac{1}{100}$: & comme on ne sauroit ici, en aucune façon, attribuer cet effet à la ténacité de l'air, qui selon les expériences est trop petite, la cause n'en peut être que la grande impression que la bille fait dans le drap. Aussi remarque-t-on très distinctement com-

me le drap se comprime à mesure que la bille s'y meut, de laquelle compression par conséquent doit naître cette même force que nous avons indiquée par la lettre δ. On ne sauroit ici objecter que cette force se détruit par la restitution du drap en arriere, le drap n'étant point un corps parfaitement élastique, & cette restitution n'arrivant pas assez promtement.

28. Donc, si nous posons $\delta = \frac{1}{100}$, & $m = 2000$; kk étant $= \frac{2}{5}aa$, l'expression donnée au §. 22. assignera le tems écoulé depuis le commencement du mouvement jusqu'à son extinction, en secondes, de cette maniere

$$n = \frac{400\sqrt{7a}}{\sqrt{3g}} \text{ A. tang } \frac{c\sqrt{3}}{8\sqrt{7ag}}.$$

Soit ensuite le rayon du globe $= \frac{1}{14}$ pieds du Rhin; puisqu'alors $g = 15\frac{5}{8}$ pieds, si nous exprimons de même la vitesse c en pieds du Rhin, nous obtiendrons

$$n = \frac{160}{\sqrt{15}} \text{ A. tang } \frac{c\sqrt{3}}{10\sqrt{5}} = 41{,}3118 \text{ A. tang } 0{,}07746c,$$

Et partant, lorsque c ne surpasse pas quelques pieds, on aura assez exactement

$$n = \frac{16}{5}c - \frac{4}{625}c^3 + \frac{9}{390625}c^5 - \text{\&c. secondes};$$

De sorte que, la vitesse initiale c étant donnée, le tems de la durée n' sera comme je l'ai présenté dans cette petite table

c pieds	n secondes
1	3, 19
2	6, 35
3	9, 43
4	12, 41
5	15, 27

29.

29. Au reste, si nous voulons faire l'application des formules trouvées aux expériences, je remarque d'abord que, pour l'ordinaire, on n'imprime aux globes qu'un mouvement progressif; dont la vitesse a été posée ci-dessus $= \beta$, de sorte qu'il soit $\gamma = 0$.

Ensuite il nous faudra déterminer la continuation du mouvement avant qu'il se change dans un rotatoire parfait par les formules données au §. 3. mais ayant égard d'augmenter partout la résistance de l'air de la particule δ, de sorte que nous ayons à présent

$$2dp = -2(\lambda + \delta)dt - \frac{3ppdt}{4ma}; \quad 2dq = \frac{\lambda\alpha\alpha dt}{kk},$$

d'où, en posant $\frac{4}{3}(\lambda + \delta)ma = \alpha\alpha$, l'on trouve à cause de $\gamma = 0$,

$$t = \frac{8ma}{3\alpha}\left(\text{A tang}\,\frac{\beta}{\alpha} - \text{A tang}\,\frac{p}{\alpha}\right) = \frac{2kkq}{\lambda\alpha\alpha}.$$

Le mouvement du globe se changera donc dans un mouvement rotatoire parfait, lorsque $q = p$, ou bien après un tems où

$$\text{A tang}\,\frac{\beta}{\alpha} - \text{A tang}\,\frac{p}{\alpha} = \frac{3\alpha kkp}{4\lambda ma^3},$$

& dès qu'on a trouvé par cette équation la valeur convenable de p, le tems même écoulé depuis le commencement jusqu'au mouvement rotatoire parfait sera $t = \frac{2kkp}{\lambda aa}$.

Depuis lequel moment où la vitesse tant progressive que rotatoire est $= p$, le développement ultérieur du mouvement, jusqu'à sa fin, doit être calculé par les préceptes donnés aux §. 22. & suivans.

30. D'ailleurs, comme δ est pour l'ordinaire une fraction très petite, & λ dont on ne sauroit savoir la valeur trop exactement à peu près $= \frac{1}{3}$, il est clair qu'en calculant le mouvement avant qu'il se change dans un rotatoire parfait, il sera permis de négliger la particule δ, & se servir des préceptes donnés ci-dessus §. 3.

Or

Or, dès que le mouvement est devenu rotatoire parfait, toute sa détermination ultérieure dépendra uniquement de cette particule δ, & on n'aura plus d'égard au frottement proprement dit, & partant à la quantité λ.

D'où nous apprenons que, lorsque le globe a un mouvement rotatoire parfait, où il paroit que la seule résistance de l'air lui est contraire, il y a pourtant encore une autre force répulsive dont la quantité, la masse du globe étant $= M$, est $= \delta M$, ou bien selon toutes les conjectures à peu près $= \frac{1}{100} M$.

Or il conviendroit plutôt de faire plusieurs expériences, & de déterminer pour chaque cas particulier, selon la qualité différente du plan, & selon la grandeur & pesanteur du globe mouvant, la véritable quantité de cette force; son existence étant déjà très suffisamment prouvée par des observations, pour ainsi dire, journalieres.

Fig. 1.

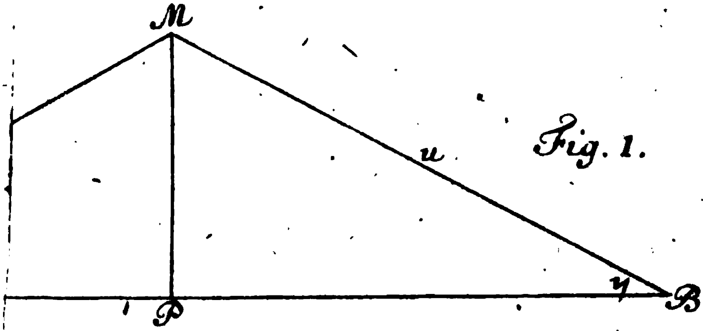
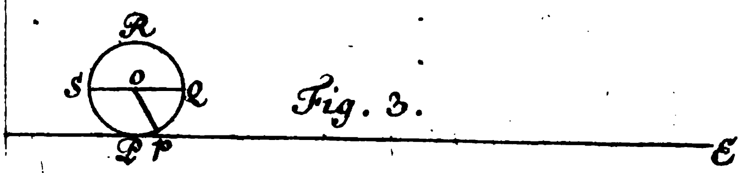


Fig. 2



Fig. 3.



.6. pag. 284.

MÉMOIRES
DE
L'ACADÉMIE ROYALE
DES
SCIENCES
ET
BELLES-LETTRES.

CLASSE DE PHILOSOPHIE SPÉCULATIVE.

* * *

Nn 3

ANALYSE
DE LA NOTION DU GOUT,
PAR M. FORMEY.

Je n'ignore pas que le sujet que je viens d'indiquer est un de ceux qu'on a le plus souvent traités, & qu'il a été manié par de très habiles gens. Je crois avoir lu à peu près tout ce qu'on a écrit de plus considérable là dessus; mais ce n'est d'après aucun de ces Ouvrages que je vais tracer mes réflexions, quoique je ne voulusse pas nier que la plûpart d'entr'elles ne se trouvent ailleurs. Il se peut qu'elles soient un résultat de cette réminiscence vague & obscure qui se conserve dans notre esprit, de toutes les choses que la conversation ou la lecture lui ont souvent offertes; mais ce qu'il y a de certain, c'est qu'elles sont nées d'elles-mêmes dans le mien, sans aucun rapport sensible avec l'action précédente de semblables causes, & qu'ayant cru y démêler quelque chose de propre à répandre du jour sur une matiere intéressante, & qu'on a pour le moins aussi souvent embrouillée qu'éclaircie, j'ai d'abord jetté rapidement sur le papier la suite d'idées que le travail de la méditation avoit produites comme en bloc: & à présent je vais les développer, les étendre, les orner, autant que je puis en être capable, pour en former un Mémoire qui ne soit pas indigne de quelques momens d'attention.

Le Gout, rélativement à l'ame, est ainsi nommé par métaphore; c'est un terme emprunté du nom d'un de nos cinq sens, de celui dont l'usage consiste à distinguer dans les corps sapides certaines qualités qui nous affectent, & qui produisent un nombre innombrable de

de sensations particulieres & différentes, réunies sous la sensation générale du *Goût*. De même que notre corps est exposé à l'action & à l'impression d'une infinité d'objets, & que l'organe du *Goût* en particulier savoure une foule de choses différentes; de même aussi notre ame, à mesure que les idées naissent & se développent en elle par l'intervention des sens, se plait ou se déplait dans la considération de ces idées, travaille à faire renaître celles qui lui ont plû, & à éloigner celles qui lui ont déplû; & en agissant ainsi, montre du *goût* pour les unes & du *dégoût* pour les autres. Le parallele entre les objets du *goût* matériel, & ceux du *goût* de l'ame, s'étend encore plus loin. Comme il y a des saveurs simples, qui se trouvent dans les corps que la nature nous fournit, sans aucune préparation ou addition de notre part, & des saveurs composées où l'art combine différentes choses d'un goût agréable pour en former un tout plus agréable encore; pareillement les choses qui plaisent seules & isolées à notre ame, lui plaisent encore d'avantage, quand certaines combinaisons en rassemblent plusieurs sous un même point de vue. Un Distique, un Quatrain, peuvent être goûtés; mais ils ne le seront jamais autant, choses égales, qu'une Tragédie, un Poëme Epique. Il faut en dire autant d'un petit pavillon, ou salon de Jardin, & d'un magnifique Palais. Plus le nombre des choses qui nous plaisoient chacune en particulier, s'augmente, pourvu que ce soit avec un certain ordre, & suivant certaines regles, plus notre *goût* est flatté & satisfait.

Tels sont les rapports entre les deux especes de *Goût* dont nous sommes susceptibles; mais une différence bien marquée, & véritablement spécifique, les distingue, de maniere à ne pouvoir plus les confondre. Le *Goût corporel*, celui dont la langue & le palais sont le siege, porte à l'ame une sensation, mais il l'y porte entierement confuse, sans qu'il existe, ni puisse jamais exister, un degré quelconque de possibilité d'y distinguer quoi que ce soit. C'est le cas de toutes les sensations. L'oeil n'apperçoit point les parties primitives des corps d'où partent les impressions de l'étendue & des couleurs; l'oreille ne saisit point les vibrations élémentaires de l'air qui forment les sons

ſons & les modulations; & il y a encore plus de groſſiéreté dans la perception des choſes tactiles & olfactives. Voilà le partage, & en même tems le caractere diſtinctif, des ſenſations corporelles, & du *Goût* en particulier. Mais l'ame va plus loin; elle conſidere, autant qu'il lui eſt poſſible, dans les choſes qu'elle goûte, les cauſes ou les raiſons du plaiſir qu'elle y trouve: & quoique pluſieurs circonſtances dont nous parlerons dans la ſuite, viennent traverſer ſes opérations & ſes recherches à cet égard, il eſt toujours certain qu'elle tend à une ſorte d'analyſe des objets du *Goût*, & que ce ſont les progrès de cette analyſe qui augmentent ceux du *Goût*, l'épurent & le perfectionnent; ce qui arriveroit toujours, ſi l'analyſe étoit toujours juſte, conforme aux qualités réelles des choſes, & qu'elle ne fût pas ſi ſouvent dérangée & altérée par de fauſſes impreſſions, & des préjugés de toute ſorte. De là la dépravation du *Goût*, & les contradictions qui regnent entre les goûts, ſoit des particuliers, ſoit des nations.

Quoiqu'il en ſoit, l'ame ne goûte que ce en quoi elle commence à découvrir quelque choſe qu'elle juge être une beauté, ou une perfection; la naiſſance de cet acte, le premier inſtant de cette découverte, annonce que le *Goût* n'eſt plus un ſimple méchaniſme, une appartenance du corps, ſi je puis ainſi dire; mais que l'ame y intervient, & qu'elle ſe l'eſt appropriée. C'eſt donc ici le lieu de placer ma définition du *Goût*, qui va ſervir de baſe à toutes les réflexions de ce Diſcours, & qui, ſi je ne me trompe, aura les conditions requiſes dans une bonne définition, dans une définition exactement applicable à toutes les parties du défini, & qui devient enſuite une notion féconde & directrice, d'où procedent d'autres définitions juſtes & utiles.

LE GOUT eſt en général *la connoiſſance des beautés quelconques qui ſont répandues dans les Ouvrages de la Nature & de l'Art, en tant que cette connoiſſance eſt accompagnée de ſentiment.* Toutes les équivoques, tous les embarras, qui regnent dans les raiſonnemens ordinaires ſur le *Goût*, diſparoiſſent, ce me ſemble, à l'aide de cette définition, & diſparoîtront d'autant mieux qu'on l'approfondira, & qu'on ſaura l'appliquer. En effet ces embarras & ces équivoques vien-

viennent de ce qu'on a presque toujours tronqué la définition, en bornant le *Goût*, tantôt à la connoissance seule, tantôt au sentiment seul. Les uns ont cru qu'avoir du *goût*, c'étoit pouvoir expliquer, développer, discourir, raisonner; & qu'un homme qui soumettoit les objets du *goût* à ces opérations, étoit par là même *un homme de goût*. Les autres ont prétendu que celui qui, à la seule présence des objets en question, étoit ému, affecté, ébranlé, quelquefois même enthousiasmé & ravi, possédoit le *goût*, quoiqu'il ne fût pas en état de donner la moindre idée de ce qui produisoit en lui de semblables situations. L'assertion ne sauroit avoir lieu, ni au premier, ni au second égard. Il n'y a quelquefois pas la moindre étincelle de *goût* dans les personnages les plus doctes & les plus profonds; ils ont beau s'épuiser en préceptes; en distinctions, & en analyses; faute de sentiment, il leur arrive de condamner des beautés qui ne peuvent être saisies & senties que par une faculté dont ils sont destitués; ils voudroient tout tirer au cordeau, tout soumettre à l'équerre; & dès-lors les Graces, qui ne respirent qu'aisance & liberté, s'enfuyent sans retour, les saillies heureuses, les traits hardis de génie, les licences des grands Maîtres, disparoissent, & font place à une triste & ennuyeuse sécheresse. D'un autre côté, ceux qui n'ont pour guide qu'un sentiment aveugle, marchant à tâtons, vont quelquefois se heurter fort rudement contre les principes du bon-sens, & ne sauroient surtout être d'aucune utilité pour former & diriger les autres, puisqu'un simple sentiment est une idée incommunicable.

J'avoue cependant que, s'il y avoit nécessité d'opter entre la connoissance & le sentiment, & qu'on ne pût donner le nom de *Goût* qu'à l'une de ces deux choses, il appartiendroit à plus juste titre à la seconde qu'à la premiere, puisque c'est le sentiment seul qui a de l'analogie avec ce que nous appellons *goût* à l'égard du corps. La connoissance juge & apprécie; mais ce n'est qu'après que le sentiment a goûté; & par conséquent, si l'on vouloit parler à la rigueur, il n'y a que le sentiment qui goûte. On peut le comparer à l'instinct des animaux; & comme lui il est sûr jusqu'à un certain point. Il l'est cependant-

pen-

pendant beaucoup plus dans les animaux, premierement parce qu'il est beaucoup moins varié; il s'en faut infiniment qu'il y ait autant d'objets qui les affectent, & dont les impressions se croisent, se traversent, & souvent se détruisent l'une l'autre: en second lieu, & surtout, parce qu'il se réduit au pur méchanisme, ou peu s'en faut, l'ame des bêtes n'ayant, ni raisonnement, ni liberté, ni tous ces caprices qui agitent continuellement celle des hommes, qui les jettent hors de la route, & leur font perdre de vue le vrai *goût*, le *goût* simple & naturel, qu'ils étouffent sous l'amas d'une infinité de *goûts* fantasques & imaginaires. Il n'est pas surprenant que les controverses sur le *goût* soyent interminables, & qu'elles aillent quelquefois jusqu'à faire nier son existence; puisque très souvent tel ou tel *goût* particulier qui fait l'objet de la dispute est faux, dénaturé, & inconciliable, si je puis parler ainsi, avec aucune sorte de principe.

L'étonnante diversité des *Goûts* n'est pas difficile à expliquer d'après la définition que nous avons donnée du *Goût* en général, considéré en soi & dans ses causes réelles & primitives. Cette diversité vient, & doit nécessairement venir, de l'inégale distribution des deux principes du *goût*; des connoissances & du sentiment. Je crois qu'on pourroit affirmer, qu'il n'y a personne à qui l'une ou l'autre de ces deux choses manque absolument. Les gens les plus grossiers & les plus stupides ont certaines lueurs obscures, certaines notions confuses du Beau, tout comme ils ont une Logique naturelle, à l'aide de laquelle ils tirent des conséquences de certains principes. D'un autre côté, il n'y a point d'individu humain dénué de tout sentiment, inaccessible à toute impression, pour qui tout soit égal & indifférent; quoiqu'il y en ait qui poussent l'insensibilité extrèmement loin, & qui ressemblent plus à des statues qu'à des êtres organisés & vivans. De ces deux points, je veux dire, du plus bas degré de connoissance & du plus bas degré de sentiment, partent & s'élevent les uns au dessus des autres une infinité d'états intermédiaires jusqu'aux deux points opposés, savoir la connoissance la plus distincte & le sentiment le plus exquis. Cet espace est

est rempli à l'égard des hommes, (car on pourroit l'envisager aussi à l'égard d'une chaîne d'Etres dont l'espece humaine ne seroit qu'un chaînon,) il est rempli, dis-je, par tous les habitans de cette Terre, qui ont été, sont, & seront, & dont chacun a eu, a, ou aura son *goût* propre, & différent de celui de tous les autres, proportionnellement au degré de connoissance qu'il possede, & au sentiment dont il est doué. Ici, comme partout ailleurs, le principe des *Indiscernables* a lieu.

Dans l'usage ordinaire, ceux en qui l'on ne remarque aucune connoissance, aucune réflexion rélative aux objets du *goût*, sont censés entierement privés d'idées à cet égard, quoiqu'ils en ayent toujours, comme nous venons de le remarquer, de plus ou moins confuses. Ce paisan, qui, à la vue de quelque chef-d'oeuvre de Peinture ou de Sculpture, ouvre de grands yeux & une bouche béante, roule assurément dans sa tête quelques idées du Beau, accommodées à la portée de son génie; mais, comme il est incapable de les développer, & qu'il n'en résulte aucun effet sensible, elles sont comptées pour rien: c'est un infiniment-petit qui n'entre dans aucun calcul, qui ne grossit aucune somme. Ceux qui ne donnent aucun signe de sentiment, & que rien ne tire de leur léthargique indifférence, sont aussi réputés sans *goût*, quoiqu'on ne puisse douter, qu'il ne s'excite en eux quelque ébranlement, qu'ils n'éprouvent quelque chatouillement secret, mais qui n'est pas suffisant pour les tirer de leur assiette. Ce dernier ordre de personnes est le plus rare; la Nature est beaucoup plus libérale du sentiment que de la connoissance: ou plutôt le sentiment est un don immédiat de la Nature, & par conséquent doit être universel, au lieu que la connoissance présuppose toujours un travail, un développement d'idées, qui dépend du concours de certaines circonstances, dont l'existance est casuelle. Ces remarques étoient nécessaires pour ôter toute équivoque dans celles qui vont suivre, où nous semblons supposer dans les uns un *Goût* de pure théorie, & dans les autres un *Goût* de pur sentiment.

Arrêtons nos regards sur ces contrées que la lumiere des Sciences & des Arts éclaire, où l'on a de fréquentes occasions de voir, d'en-

d'entendre, de lire des Ouvrages, qui chacun dans leur genre sont le fruit du *Goût*, & où les conversations roulent fréquemment sur ces matiéres. Le *Goût* semble avoir fixé son empire dans de semblables lieux; mais il s'y exerce d'une maniere si bizarre qu'on a bien de la peine à démêler l'esprit & les loix de cet empire, & à les concilier avec des loix antérieures & immuables, celles de la Raison & du Bon-sens.

D'abord on distingue dans la foule quelques personnes qui ont acquis de la célébrité, & dont les productions ont eu une vogue qu'ils ne manquent pas d'attribuer uniquement à leur mérite, à la perfection de leurs Ouvrages, quoique l'expérience prouve souvent qu'elle n'est l'effet que du caprice & de certaines circonstances passageres. Ces Illustres du Siecle ne manquent gueres de s'ériger en Législateurs, & de vouloir astreindre les autres à suivre les modeles qu'ils leur ont tracés, à puiser dans leurs Ecrits, comme dans la plus pure, peu s'en faut qu'ils ne disent, l'unique source du *goût*. Le ton imposant avec lequel ils parlent, & les éloges dont d'ignorans admirateurs les accablent, en imposent aux esprits vulgaires. De jeunes gens qui entrent dans la carriere d'Auteurs, croyent n'avoir rien de mieux à faire que d'aller à la gloire par une route qu'ils trouvent frayée: & voilà comment il arrive qu'un homme peut donner le ton & la loi en fait de *goût* à son siecle, & s'arroger une espece de Dictature sous laquelle tout plie. Cependant la Raison ne sauroit perdre ses droits; & il se trouve toujours quelcun qui, de sens froid, examine, pese, évalue les ouvrages & les talens des Grands-hommes à la mode, & parvient à se convaincre qu'il y a plus d'illusion & de prestige dans leur fait, que de valeur réelle & de prix intrinséque. Ce sont, pour l'ordinaire, des imaginations vives, des génies ardens, en qui tout pétille, tout étincele, mais dont le sort est pareil à celui des fusées qui s'elevent avec un grand éclat, pour retomber éteintes & amorties. Otez-leur le mérite de l'expression & de l'imitation; ce qui reste ressemblera à ce *subjectum* ou *substratum* des accidens, dont les Scholastiques parloient tant, & qu'on ne sauroit découvrir ni reconnoître à aucune marque.

Ces gens-là gâtent beaucoup plus souvent le *goût* qu'ils ne le perfectionnent; ils n'ont gueres qu'un seul moule dans lequel ils jettent tout, comme si chaque genre d'ouvrage n'avoit pas ses beautés propres & incommunicables. Cela vient de ce qu'ils n'ont point de théorie fixe, qu'ils n'ont jamais étudié les regles, qu'ils ne sont jamais remontés aux principes, & qu'un sol orgueil leur persuade qu'ils sont au dessus de tout cela. On est quelquefois surpris que tant d'ignorance puisse accompagner tant de présomtion; mais ce phénomene, à force d'être devenu commun, cesse d'être surprenant.

Vis à vis de ces Oracles, mais dans une situation beaucoup moins brillante, sont placés ces Savans profonds & méditatifs, qui ont lu & relu tout ce qui a été dit sur quelque science rélative au *Goût*, telles que sont l'Eloquence, la Poësie, l'Art du Théatre; qui ont soigneusement & scrupuleusement rédigé tous les préceptes qui s'y rapportent; qui en ont formé des especes de théories ou de systêmes; & qui de là, comme d'un Tribunal, citent, accusent & jugent ceux qui travaillent dans le genre où ils prétendent être Maîtres & Docteurs. On ne sauroit nier que de très habiles gens n'ayent tourné leurs vues de ce côté-là, & n'ayent fort bien réussi dans les Traités didactiques qu'ils ont composés. Mais, généralement parlant, ils n'ont pas eu assez de la portion du *Goût* qui consiste dans le sentiment; leur Critique s'est souvent appésantie mal à propos sur des choses dont ils ne sentoient pas les beautés & les finesses; &, si l'on en avoit quelquefois crû leurs avis, certains Ouvrages qui sont reconnus à présent pour excellens, n'auroient pas été entrepris & exécutés. On sait, par exemple, qu'il n'a pas tenu à *Patru*, cet *Aristarque* de son temps, que *Boileau* ne renonçât à la composition de son *Art Poëtique*, qui est cependant le chef-d'oeuvre de ce grand Poëte, & peut-être de toute la Poësie Françoise. Néanmoins je suis dans l'idée que ceux qui veulent se distinguer par des productions marquées au bon coin, doivent consulter les Maîtres, s'instruire dans des Livres de théorie, & s'affermir même jusqu'à un certain point dans la connoissance exacte des regles, avant que de se livrer au feu, à la verve

qui

qui les entraîne. L'incorrection, la legèreté, la superficialité, qui fait le caractere de presque tous les Livres frivoles dont on est inondé, vient uniquement du mépris pour les regles, & de la ridicule pensée que le génie, ordinairement très médiocre dans ceux qui pensent ainsi, & l'imitation, viennent à bout de tout.

Au dessous de ces deux ordres de Juges qui président aux Jeux Olympiques de la Littérature, sont les combattans & les spectateurs. Les combattans sont précisément ces Auteurs, ou Artistes subalternes, dont je viens de parler, qui entrent dans la lice, & courent la carriere au bruit confus & mêlé, tantôt de quelques applaudissemens, tantôt & plus souvent de la risée & des sifflets. C'est le *Goût*, qui les fait partir tous: mais comment les conduit-il? A travers champs, ou par les routes les plus tortueuses. La fureur d'écrire est un mal épidémique, & ses effets sont inconcevables. Au milieu des tourbillons de poussiere qu'excitent tant d'Ecrivains qui se croyent inspirés par le Dieu du *Goût*, tandis qu'ils sont possédés par quelque mauvais Génie, le moyen que la lumiere pure & tranquille de la vérité & de la décence, (les deux choses qu'*Horace* exigeoit avec tant de raison,) se conserve. Les gens de bon-sens craignent d'être confondus parmi une foule aussi méprisable; & il se forme un préjugé général, qui n'est à la vérité qu'un préjugé, mais dont la réfutation n'est pas aisée, c'est que les Sciences & les Lettres sont plus nuisibles qu'utiles. Cela n'est pourtant vrai que des écarts où se jettent ceux qui les cultivent, & non des vérités mêmes qui forment le fonds & la réalité des connoissances humaines: vérités qui seront toujours utiles, tant qu'elles seront traitées & présentées par des gens d'un jugement solide & d'un goût épuré.

Passons aux Spectateurs. Ce sont eux qui composent ce redoutable Public, devant lequel les Auteurs paroissent presque toujours à genoux, & qu'ils ne cessent jamais de craindre lors même qu'ils paroissent le braver. Le Public a-t-il simplement un *goût*, ou a-t-il effectivement du *goût?* C'est de la décision de ce probleme que dépend la conduite qu'on doit tenir à son égard. Il y a des tems & des

lieux

lieux où le public sembleroit n'avoir qu'un *goût* vague, confus, peu digne de l'attention de ceux qui lui présentent leurs ouvrages. Mais il ne faut pas s'y méprendre. Ce sont des états passagers & extraordinaires, comme le sont dans un homme la fievre ou le transport de quelque passion. Ceux qui travaillent dans la vue de complaire à cette sorte de *goût*, & d'obtenir les suffrages du jour, ne connoissent pas le Public, celui qui mérite des égards, & de l'approbation duquel on doit être jaloux.

Pour déveloper cette idée, qui est sans contredit très importante, puisqu'il n'y a point d'écueil plus funeste aux réputations qu'une déférence pour le Public accordée ou refusée mal à propos, je distingue un public passager, fugitif, pour ainsi dire, & un Public constant, impérissable. Le premier est le plus nombreux, & peut même pendant un tems éclipser l'autre. C'est celui que les déclamations charment, que les grands traits, quoique grossiers, frappent, qui veut de l'esprit où il n'en faut point, & qui le méconnoit où il est, en un mot qui donne presque toujours à gauche, tant qu'il juge par lui-même. Voilà le Public qui fait pour l'ordinaire ces fortunes littéraires & ces réputations, dont les apparences sont les mêmes, ou plus brillantes encore, que celles qui sont fondées sur les talens réels & sur le vrai mérite. Mais, si le Public légitime, celui qui a seul le droit de régler les rangs, ne met son sceau à de pareilles décisions, elles perdent bientôt toute leur force: au bout d'un certain tems à peine en conserve-t-on le souvenir, ou bien ce souvenir est un sujet d'étonnement. On demande, comment il est possible que tels & tels Auteurs, un *Ronsard*, par exemple, & ceux qui formoient avec lui la fameuse Pleïade, ayant été mis si haut par leurs contemporains, tandis qu'on les voit aujourdhui si bas, & presqu'oubliés. La raison en est que le vrai Public n'avoit pas jugé, soit qu'il n'existât pas alors, ou que sa voix fut trop foible pour se faire entendre. Il est fâcheux à la vérité pour un Auteur excellent, (& le cas est souvent arrivé,) de passer toute sa vie sans recueillir ce fruit le plus précieux de ses veilles, ces applaudissemens qui affectent si délicieusement ceux qui en sont l'objet. Cette

Posté-

Postérité sur laquelle on fonde ses espérances est à certains égards un trop foible dédommagement des avantages réels, des honneurs & des biens qu'emportent à nos yeux & à notre dam des gens fort inférieurs. Il y a pourtant une espece de lâcheté de céder à ces motifs, & de se livrer, le sachant & le voulant, au torrent de quelque mauvais goût dominant. Un homme qui a des principes décidés, & qui pense noblement, n'écoutera jamais que le *dictamen* intérieur de sa raison & de sa conscience, & s'y conformera ici comme partout ailleurs. Il sied donc bien à des personnes de ce caractere, non de braver hautement le Public, de le mépriser & de l'insulter sans ménagement, (cette manoeuvre est toujours messéante & dangereuse,) mais de le regarder comme n'existant point, de demeurer fidele à sa façon de penser, & de travailler à bon compte, dans l'attente que les sentences injustes & partiales qu'il faut actuellement essuyer, seront un jour rectifiées. C'est la consolation du bon Auteur, tout comme celle de l'homme de bien. Mais il n'y a rien de plus ridicule que de voir les mauvais Auteurs y chercher leur refuge, se plaindre d'un ton grotesquement lamentable de l'injustice du siecle, faire des Appels au bas desquels la Postérité mettra *néant*, tout comme le font leurs contemporains. Il n'y a point de chétif Ecrivain, quelque disgracié qu'il soit des Muses, & même du bon-sens, qui ne parle du Public & de la Postérité avec autant de hardiesse que s'il y avoit pour lui un Public & une Postérité. Cela vient de ce que tous les hommes sont dans le cas de *Ciceron*, lorsqu'il revenoit de sa Questure. Il croyoit que toute la ville de Rome ne s'entretenoit que de ce qu'il avoit fait dans l'exercice de cette Magistrature: & l'on ne savoit pas seulement à Rome où *Ciceron* avoit été.

Ce que nous avons dit des jugemens tumultueux du Public inférieur, peut-être vérifié par des exemples quotidiens. Tirons-en de la Prédication & de la Peinture. Un Prédicateur, surtout s'il a le mérite de la nouveauté, débite avec emphase des discours pleins de verbiage & vuides de sens; il descend de chaire en fendant des flots d'Auditeurs extasiés; il n'y a que deux ou trois Juges compétens qui se disent à l'oreille que le Chrysostome prétendu n'est qu'un vain ja-

ſeur ou un hardi Déclamateur. Vous n'entendez pas aujourdhui la voix de ces Juges; mais ce ſera pourtant celle qui prévaudra, & qui ſeule réglera dans la ſuite la réputation de ce Prédicateur, qu'on verra bientôt rentrer dans ſon premier néant. Il en eſt de même du Tableau. Expoſez-le aux yeux d'une troupe de perſonnes de tout ordre. Il va être mis en pieces: il n'y a pas un trait que les uns ne veulent ôter, d'autres conſerver, & d'autres changer. Que fera le Peintre, ſurtout ſi c'eſt un Peintre excellent, & que ſon Tableau ſoit digne de lui? Il écoutera froidement ce babil, & laiſſera juger les connoiſſeurs, ou agir le tems, qui ne manqueront pas de lui rendre bonne juſtice. Je remarque ſeulement, & je finis par là mes réflexions ſur le Public, que les connoiſſeurs contemporains, & du même métier, ſont ſouvent plus ſuſpects & moins équitables que le gros du Public, quoique celui-ci ſoit moins capable de juger. Il n'eſt pas beſoin d'en dire la raiſon. Tout le monde ſait ce que peuvent la rivalité, la jalouſie, l'envie.

Je m'engagerois à préſent dans un Traité, & même fort étendu, ſi je voulois détailler les différentes cauſes de la variété des *goûts*, qui naiſſent du climat, de l'éducation, & de toutes les impreſſions externes, ſurtout de celles qui ſont habituelles. Il n'eſt pas poſſible que la même choſe plaiſe à une imagination Orientale, toujours en fermentation, & pour qui les hyperboles les plus outrées, ou les allégories les plus bizarres, ne ſont que des figures ſimples & familieres, & un habitant glacé des contrées voiſines du Pole. Les différences que la Nature a miſes dans la couleur, dans la ſtature, & juſqu'à un certain point dans les linéamens des Peuples, ſe trouvent également dans leur eſprit, dans leur génie, dans leur humeur & dans leur *goût*. Mais, quelque immenſe que paroiſſe l'amas des faits qui en réſulte, il eſt au fonds réductible à une ſeule notion, à la liaiſon de notre ame avec ſon corps, & par le moyen de ce corps avec les diverſes parties de l'Univers. L'homme n'eſt pas une machine; mais à pluſieurs égards il eſt très machinal. Quiconque en particulier néglige la culture des facultés de l'ame, & lui laiſſe perdre l'empire naturel & légitime

time qu'elle a sur les opérations du corps, n'agit plus que par ressort & par impulsion, & se trouve réduit au même méchanisme qui produit les actions des brutes. Or on ne sauroit disconvenir que ce ne soit là le cas des nonante-neuf centiemes du genre humain; & que la raison suffisante des *goûts* à leur égard ne soit uniquement une raison historique, un fait à la connoissance duquel il faut remonter, pour découvrir la cause de leurs *goûts* dans les impressions matérielles qu'ils ont reçues. La recherche détaillée de ces faits est infinie, & n'entre point dans notre plan. L'excellent Ouvrage de M. le Président de *Montesquieu*, sur l'*Esprit des Loix*, est rempli de principes & de réflexions, dont il est très aisé de faire l'application à notre sujet.

Tels sont donc les *goûts* partiaux & individuels, répandus dans le Monde, & dispersés parmi la masse des hommes. Je demande à présent en quoi consiste le *Goût* par excellence, le *Goût* porté au plus haut degré de perfection dont il soit susceptible, le *Goût supreme?* Et avant que de répondre, je distingue deux sortes de *Goût supreme*. Le premier est celui qui convient à une Intelligence finie, & spécialement à l'homme, tel que nous le connoissons; le second, celui que possede l'Intelligence infinie. L'homme n'exerce aucune faculté de l'ame d'une maniere pure, c'est à dire, exempte du commerce & du mêlange des sens & de l'imagination. C'est ce qui l'arrête dans le progrès des idées distinctes, & ne lui permet jamais d'en former qui soyent pleinement adéquates. Toujours quelque ombre, quelque nuage élevé de la région inférieure des sens dans la région supérieure de l'Entendement, y répand un degré plus ou moins considérable d'obscurité sur les idées que nous voudrions spiritualiser, & dégager, si je puis ainsi dire, de toute *corporéité*. Cela est vrai & nécessaire à tous égards; mais cela est d'une double nécessité à l'égard du *Goût*. La raison en est manifeste. Le *Goût* a pour base le sentiment; & qu'est-ce que le sentiment, sinon une perception confuse des objets, acquise par le moyen des impressions que ces objets font sur les organes? Il y a plus encore: dans des idées d'un autre genre vous partez, il est vrai, d'une premiere idée acquise par les sens, mais

vous vous en éloignez quelquefois de maniere à la perdre entiérement de vue, vous allez d'abstractions en abstractions jusqu'aux notions les plus épurées, & qui paroissent les plus immatérielles. L'entreprise de séparer les deux principes constituans du *Goût*, la connoissance & le sentiment, est vaine & impossible. Tout cela posé, nous n'aurons pas de peine à assigner quel est le *Goût suprême* dans l'homme: C'est *le plus haut degré de connoissance joint au sentiment le plus exquis.* Celui qui possede actuellement cet assemblage, ou qui en approche le plus, (car la perfection, en quelque genre que ce soit, n'est pas le partage de l'homme, c'est simplement son modele, ou le but vers lequel il doit tendre,) celui, dis-je, qui réunit ces deux prérogatives dans le plus haut degré auquel une Créature telle que l'homme puisse les porter, est le possesseur, le dépositaire du *Goût suprême*. J'estime cependant que ce *Coryphée* du *Goût* n'existe point, & même qu'il ne sauroit exister. Je me fonde sur ce que deux facultés d'un genre différent ne se trouvent jamais dans un même individu au plus haut degré; la force, la supériorité de l'une a toujours lieu aux dépens de l'autre. Ce qu'on dit communément du Jugement & de la Mémoire, je le dis avec plus de droit de la partie théorétique du *Goût*, & de la partie sensible. Un Esprit qui se nourrit de réflexions & de vues profondes, n'est pas ordinairement porté aux objets de sentiment, & surtout aux finesses, aux délicatesses dont leur perception est susceptible; & réciproquement, les ames sensibles à l'excès ont une espece d'éloignement pour la spéculation & l'analyse des idées. Ainsi il me paroit contraire à la Nature & à l'Expérience, de supposer la réunion des deux choses dont il s'agit, poussées l'une & l'autre jusqu'où elles peuvent aller.

Elevons enfin nos regards jusqu'à l'Etre suprème. Toutes les facultés de nos ames ont quelque analogie avec des attributs divins qui sont éminemment en Dieu ce que ces facultés sont dans l'homme. Mais il ne faut jamais faire usage de ce principe, (qui d'ailleurs est vrai, important & fécond,) sans se souvenir que tout ce qui procede de notre imperfection & de nos limitations, ne sauroit exister en Dieu de quelque maniere que ce soit. Ainsi, quoique cet Etre adorable voye,

juge,

juge, raisonne, se représente le passé, & embrasse tous les genres de connoissances; il n'y a pourtant en lui, ni sensations, ni actes d'imagination ou de mémoire, ni en général quoi que ce soit de semblable à ce qui procede de la liaison de notre ame avec le corps & avec les êtres matériels. Toute la partie du *Goût* qui consiste dans le sentiment, ne sauroit donc convenir à Dieu, & par là même ces nuages & ces obscurités dont nous parlions tout à l'heure, n'ont aucun accès dans l'Intelligence divine; tout y est souverainement net & lumineux; & pour tout dire en un mot, le *Goût supreme* en DIEU est *la connoissance infiniment distincte, totalement adéquate, du Beau, tant en général que dans toutes les déterminations dont il est susceptible & qu'il reçoit dans le systeme actuel de l'Univers.* Mais, comme Dieu trouve surtout en lui-même, & dans son essence, le vrai & l'unique Beau, l'original divin & accompli de toute perfection; le principal objet de son *goût*, c'est lui-même, c'est l'intuition & la possession de son être, dans laquelle se trouve en même tems le souverain bien, la souveraine félicité. Ces dernieres idées réveillent à la vérité celles de plaisir & de sentiment; aussi rien n'empêche, quand on a bien posé toutes les distinctions précédentes, qu'on n'attribue à ce Dieu que l'Ecriture nomme LE DIEU BIENHEUREUX, & qui l'est en effet, le plaisir & le sentiment qui conviennent à la nature de son bonheur.

RÉFLEXIONS

SUR

LA NATURE ET LES CAUSES DE LA FOLIE.

PAR M. DE BEAUSOBRE.

QUATRIEME MÉMOIRE.

Dans plusieurs endroits des Mémoires, que j'ai eû l'honneur de présenter à l'Académie, dans le courant de l'année derniere, j'ai combattu l'idée de ceux qui veulent chercher dans quelque partie viciée du corps la raison premiere des maladies de l'esprit. Il me reste sur ce sujet quelques réflexions à faire.

Si l'on croit trouver dans un état extraordinaire du corps ou de quelqu'une de ses parties, la raison premiere d'un dérangement réel ou apparent des opérations de l'ame, il faut y chercher aussi la cause des foiblesses de l'esprit, que l'âge semble amener, & c'est ce qu'on n'a pas manqué de faire: l'on a crû que, les organes étant usés, les esprits animaux émoussés, peut-être même dissipés, l'esprit foiblissoit: un vieillard imbécile a paru un phénomene facile à expliquer, on a regardé son état comme une suite naturelle des injures du tems: on s'est représenté cet état d'enfance, qui accompagne quelquefois la vieillesse, comme ces infirmités du corps qui viennent avec le tems, c'est à dire, qui ne sont autre chose que l'effet naturel d'une machine usée, & la folie comme une maladie violente qui emporte un jeune homme au printems de ses jours: ici c'est une machine détraquée, là c'est une machine dont les ressorts sont usés. J'ai dit qu'il étoit étonnant, qu'avec ces idées on voulut encore soutenir la spiritualité de l'ame, quoiqu'il ne soit que trop vrai que les Philosophes sont rarement

ment à l'abri des contradictions. Il me semble qu'on ne sçauroit accorder cette spiritualité avec ces systemes monstrueux, qui remontent à la même source pour expliquer les indigestions & les inconséquences.

Cependant on voit tous les jours des phénomenes qui semblent contredire ce que j'ai essayé de prouver. Un peu de vin anime un homme, chasse certaines idées pour en ramener d'autres, paroit même lui donner de l'esprit: c'est un autre tableau qui succede au premier. Une indigestion abasourdit un homme, il ne pense presque plus, le chagrin succede au plaisir; il voit tout en noir & les plus riantes perspectives deviennent d'affreux tableaux: la fievre chaude, qui fait naitre de violens transports, & la morsure d'un chien enragé, semblent nous priver de l'usage de la raison: on n'ignore pas les dangereux effets de ces longues maladies qui énervent l'homme, & ce qui est encore plus, les tristes & malheureuses suites de l'ivrognerie, qui hébetent ceux qui s'y abandonnent. Quoi! un peu de salive qui se communique au sang, quoi! la rapidité inégale du sang qui circule dans les veines, quoi! les esprits d'une liqueur, quoi! un coup à la tête, auroient tant d'influence sur les opérations de l'ame, & ce ne seroit pas comme causes immédiates & premieres? Mais si ce sont là des causes immédiates des changemens qu'éprouve l'ame, pourquoi d'autres dérangemens du corps ne seroient-ils pas des causes premieres de la folie? Voilà ce qu'on peut alléguer de plus fort. J'ai bien des choses à répondre à ces expériences dont on tire de fausses conséquences: conséquences qui pourroient cependant être justes, sans qu'on pût en inférer que la folie suppose toujours un dérangement dans le cerveau, ou dans quelque autre partie du corps. Qu'on me dise si un homme passionné n'a pas des momens de folie; combien de passions n'ont pas conduit au delire! qu'on me dise si le chagrin & la douleur n'en ont pas fait autant, & si cela est, il est prouvé que la folie peut naitre sans une altération préalable du corps: j'en puis dire autant de la colere; dans cette passion le sang est violemment agité, mais cette activité & cette rapidité dans la circulation du sang produiroient-elles les phéno-

nomenes qui accompagnent l'emportement, si l'ame avant que de sortir de son assiette n'avoit eu des représentations qui l'ont affectée? Si donc il y a des cas où il est impossible que la cause de la folie se trouve dans quelque altération du corps, & ce qui plus est, si je puis expliquer ce qui paroit le plus étrange dans la folie, sans m'écarter de l'explication que j'en ai donnée, tandis qu'il faut abandonner les causes physiques lorsqu'on veut expliquer les phénomenes que j'allégue, il est naturel de conclure en faveur de l'opinion que je soutiens. Dans les objections qu'on me fait, on confond deux choses essentiellement différentes: je n'ai point dit que la folie n'étoit jamais accompagnée de quelques dérangemens dans le corps: tout au contraire: non seulement je crois que ces dérangemens peuvent être des suites naturelles de la folie, mais je conviens encore qu'ils peuvent l'occasionner & en devenir des causes médiates ou secondaires. Notre ame est faite pour être dans une espece d'harmonie avec notre corps: le corps est pour ainsi dire le monde de l'ame: c'est à la faveur de cet instrument qu'elle agit & qu'elle souffre: n'importe de quelle maniere, pourvu que ce ne soit point cet *Influ-physique*, le plus monstrueux de tous les systemes, lorsqu'on admet la spiritualité de l'ame.

Si l'on vouloit que les altérations du corps fussent la cause premiere de la folie, il faudroit admettre que ces mêmes dérangemens la produisissent toujours; mais l'expérience prouve le contraire. Il en est des causes physiques qui produisent la folie comme de ces mets innocents, qui dans de certaines circonstances deviennent des poisons dangereux. Choisissons deux exemples, qui puissent servir à éclaircir mon idée.

Le vin chasse le chagrin, égaye l'homme, l'anime, lui donne des saillies: il semble lui donner de l'esprit. Comment cela arrive-t-il? rien de plus aisé à concevoir. Qu'un homme s'occupe d'une idée chagrinante; tout absorbé dans une triste réverie, il ne songe qu'à cela, rien ne le réveille, parce que le même objet est toujours présent à son esprit; un peu de vin vient donner plus de rapidité à la circulation du sang, il se sent plus leger, il lui semble avoir acquis un nou-

nouveau degré de force, il sent du plaisir à trouver ses organes plus propres à exercer leurs fonctions; son corps est une machine dont les ressorts sont bandés: bientôt une secrette joye s'éléve, c'est un contentement intérieur attaché à l'état de santé. Si on n'apperçoit pas ces idées, ce n'est pas qu'elles ne soient bien présentes à l'esprit, mais c'est qu'elles ne le sont pas avec le degré de clarté nécessaire pour être apperçues: à cet état succédent des propos, ces propos deviennent intéressants parce qu'ils sont nés dans un heureux instant: la Nature enfin parle, & qui ne l'écoute pas lorsqu'elle parle? Le chagrin disparoit parce que des objets riants en ont pris la place; on parle avec plus de facilité: ce sont des étincelles d'un feu que la cendre ne couvre plus. Qui pourroit douter que tout cela ne s'explique & ne se comprenne sans qu'il faille avoir recours à l'influ-physique, & supposer que le vin étant monté au cerveau ait donné à l'ame une activité & des idées qu'elle n'avoit pas? Le même effet eût été produit, si on eût trouvé quelque autre moyen de chasser le chagrin, si on eût persuadé à cet homme affligé que ce qui le tourmente n'existe point, si on eût flatté sa passion, si on eût satisfait une partie de ses desirs pour en irriter adroitement quelques autres. On verra quelque chose de plus approchant encore de l'effet du vin, si on tâche de distraire l'homme chagrin par quelque spectacle qui l'attache, si on lui présente des objets qui l'occupent, si on le détourne de ce qui pourroit réveiller en lui des idées désagréables.

Ce qui arrive à un homme hébété par l'yvrognerie, ne servira pas moins à éclaircir les idées que je me suis faites de la folie. Un homme tombé dans cet état est un homme qui a passé une suite d'années sans que son esprit ait fixé longtems les mêmes objets; la rapidité avec laquelle les idées se sont succédées chez lui les unes aux autres, a été une suite naturelle de l'état où son ame s'est représenté le corps qu'elle anime; à cet état du corps agité par le vin a succédé d'ordinaire une espece d'anéantissement, qui a fait naitre à son tour le desir d'une nouvelle agitation: le corps pour avoir été trop agité a perdu sa force, il languit. Il est donc arrivé ici deux choses: 1) l'ame a perdu

la coutume de fixer longtems la même idée, 2) & elle a gagné l'habitude de trouver l'état naturel de son corps si différent de celui où il est lorsque le vin commence à faire son effet, qu'en comparant ces deux états, le premier lui paroit un mal-aise. Ajoutez à cela qu'un yvrogne trouve le travail insupportable; il semble manquer de beaucoup de ces idées nécessaires à un jugement sain, par la raison qu'il les a laissées trop longtems sans se les rappeller: c'est une espece de Géométrie perdue, de Logique oubliée: c'est l'usage de la comparaison négligé. Une preuve de ce que j'avance, c'est que la même chose arriveroit à un homme livré à toute autre passion. Qu'un homme s'attache au jeu, au point de ne faire autre chose, à une femme qui ne l'occupe que de bagatelles, aux dissipations de toutes especes; & bientôt on verra qu'il est vrai de dire que l'esprit s'affoiblit lorsqu'il n'agit point, ou qu'il ne fixe que les mêmes idées.

Ces réflexions serviront à expliquer tous ces autres phénomenes, par où l'on voudroit prouver que l'ame & ses fonctions sont soumises à tout ce que le corps éprouve. On comprendra que, si le corps & ce qui l'environne peuvent paroitre quelquefois influer sur l'ame, ce n'est assurément pas de la maniere dont on se l'imagine. Un Auteur moderne fort célébre, & avant lui Hippocrate & Arbuthnot, ont soutenu que le climat influoit sur l'esprit d'une nation, & sur la nature de son gouvernement. Cela peut être vrai sans qu'on puisse en conclure que des causes physiques agissent immédiatement sur l'ame. Dire que la pesanteur de l'air, indiquée par la différente hauteur du Mercure, variant dans les païs du nord, plus que dans ceux du midi, il faille que les habitans des contrées septentrionales éprouvent un mouvement plus varié dans les fibres du corps, & qu'ils soient plus actifs; c'est, lorsqu'on n'explique pas de quelle activité il peut être question, prêter la main à des systemes singuliers, à des opinions plus voisines de la chimere que de la réalité. Il y auroit, en supposant que cette variation dans le mouvement des fibres influât sur l'esprit, un climat pour les foux & un climat pour les sages. Mais, si l'on prouve qu'il y en a où une machine, telle que le corps humain, peut faire jouer ses ressorts

avec

avec plus de facilité & plus longtems, & qu'il s'en trouve où cette machine peut perdre tout son mouvement, soit parce que les ressorts en sont trop lâchés ou trop bandés, soit parce que les liquides nécessaires à cette machine s'accumulent ou se dissipent trop, on ne prouve autre chose par là si ce n'est qu'il y a des climats où l'ame a de la peine à se servir de son instrument, comme il y en a d'autres où elle peut s'en servir plus aisément.

Si l'on veut expliquer la folie par des causes purement physiques, il faut convenir que toutes les affections de l'ame ne peuvent être expliquées autrement. Je sçais bien qu'on prétend trouver dans le cerveau des foux quelque dérangement: mais, quand on en trouveroit chez tous les foux, ce qui n'est pas, peut-on dire pour cela que ces changemens soient des causes immédiates de la folie? ne peuvent-ils pas en être les suites? Si les altérations de quelque partie du corps pouvoient avoir un semblable effet, combien notre ame ne seroit-elle pas affectée chaque jour de mouvemens extraordinaires, notre corps y étant sujet à chaque instant! Y auroit-il un instant de notre vie sans folie? Ce sont ces idées qui ont conduit Mr. de Sauvages à soutenir, dans son Ouvrage sur les nouvelles classes de maladies, qu'il y avoit un délire universel & un délire particulier; il suppose dans le premier toutes les fibres du cerveau viciées, & il n'en suppose de telles dans le second que quelques unes.

Qu'on réfléchisse un peu à l'embarras où les Anatomistes se jettent, lorsqu'ils veulent assujettir l'ame aux mouvemens du cerveau. Mr. Lieutaud prétend que la nature ne peut agir que par quatre moyens, par la pesanteur, par la legéreté, par l'impulsion & par l'attraction; il rejette les trois premiers pour ne s'arrêter qu'au dernier: selon lui, la matiere de l'esprit animal acquiert par des circulations réitérées le dégré de legéreté, de petitesse, & de chaleur, propre à le rendre susceptible des impressions du magnétisme: la liaison du corps & de l'ame ressemblera donc à l'effet de l'aimant sur le fer.

Si l'on considere le cerveau, la moëlle de l'épine, & les nerfs, on rencontre partout un corps pulpeux, plus ou moins solide, recouvert

vert de deux enveloppes, & arrosé de quelques vaisseaux sanguins, & l'on voit que le grand usage du cerveau est de séparer l'esprit animal des liquides où il se trouve. Ces esprits animaux paroissent destinés à exciter en nous les sensations, & à y produire le mouvement: on sçait qu'une partie quelconque du corps peut perdre le sentiment sans perdre le mouvement, & perdre le mouvement en conservant le sentiment: voilà des faits: mais conclure de là qu'il y ait dans les nerfs, (instrumens du sentiment comme du mouvement,) deux sortes de matieres, qui ne sont pas soumises aux mêmes loix, & dont l'une extrêmement subtile sert à produire les sensations, & l'autre plus grossiere à produire le mouvement, pour prouver que la premiere de ces matieres agit sur l'ame & en reçoit à son tour des impressions; c'est s'imaginer que l'esprit ne differe de la matiere que par la subtilité des parties: or comme la petitesse ou la subtilité n'est qu'une rélation, par la raison que ce qui nous paroit petit est très grand à d'autres égards, on ne gagnera jamais rien à ces subterfuges, & il faudra toujours convenir que l'ame ne souffre point d'impression immédiate, ou que l'ame est matiere.

D'ailleurs ce systeme souffre encore beaucoup de difficultés: les physiciens les plus habiles ne les écarteroient pas quand même on admettroit la matérialité de l'ame. La glande pinéale, qu'on a voulu prendre pour le siege de l'ame, est de la nature de la substance corticale; elle est très souvent graveleuse, elle n'a pas dans les mêmes sujets la même consistance: tandis que le cerveau est de tous les visceres celui qui est le moins sujet aux variétés. Il eût donc du moins été raisonnable de choisir une autre place dans le cerveau, & non pas la seule dont la conformation n'est pas constante; non pas une partie où les esprits animaux doivent naturellement séjourner le moins.

Tous les Anatomistes ont conclu de ce que les nerfs passent dans les glandes salivales, que le fluide nerveux se méloit avec la salive; & ils ont cru que la rage, causée par la morsure d'un chien enragé, étoit l'effet de la salive de ce chien qui se méloit avec le fluide nerveux: cela leur a paru d'autant plus vraisemblable, que l'on a même vû des

gens

gens devenir enragés sans avoir été mordus, & simplement pour avoir avalé quelque peu de la salive d'un chien enragé. Mais, si la salive peut avoir un effet immédiat sur les esprits animaux, pour déranger les opérations de l'ame, je demanderai pourquoi un homme n'est pas aussitôt enragé que mordu, & pourquoi il est nécessaire que ce poison ait fait pendant neuf jours un ravage considérable dans le corps avant que la folie paroisse, tandis que quelques verres de vin produisent dans si peu de tems un effet bien marqué.

Il est bien probable que les sensations sont l'ouvrage des nerfs: car, plus une partie du corps a de nerfs & plus elle est sensible; c'est pourquoi la graisse ne paroit avoir aucune *sensibilité*. Ces nerfs sont remplis d'un fluide qu'on appelle nerveux, qui est comme je l'ai dit séparé du sang dans le cerveau, & qui paroit être en mouvement dès que le nerf est touché. Il reste donc à savoir si ce sont les membranes des nerfs, ou le fluide nerveux, à qui l'on doit attribuer ce que nous appellons sensations. Beaucoup d'Anatomistes ont été pour le fluide, mais il semble que si leur opinion étoit véritable, il faudroit que le cerveau fût de la plus grande sensibilité, puisqu'il s'y trouve une grande quantité de ce fluide: cependant, si l'on en excepte les vaisseaux sanguins & les pellicules, il n'y a rien dans le cerveau qui ait quelque sensibilité apparente. Comme les pellicules qui l'environnent en ont une si grande, il semble qu'il n'y a aucun doute que ce n'est point au fluide nerveux qu'on doit les sensations. Ce qui confirme cette idée, c'est que la douleur augmente toujours avec la tension des parties. Je conclus de là que les esprits animaux n'ont rien de commun avec les sensations.

Les esprits animaux échappant à notre vue, tout ce qu'on a pû en dire n'est fondé que sur des conjectures hazardées: en vain le fameux Wirdig, dans sa *Medicina spirituum*, a-t-il tenté d'en distinguer plusieurs especes: il n'a fait que prouver que la physique devient un roman dès que l'expérience cesse de l'éclairer. Comme les esprits animaux se trouvent en abondance dans la salive, & que la nature ne

 fait

fait rien sans raison, il faut convenir que les esprits animaux aident à la digestion: croira-t-on après cela que le même moyen qui fait digérer, fasse aussi penser?

Mais examinons ce qui se passe ordinairement en nous, & nous verrons qu'il n'est rien moins que nécessaire d'avoir recours à l'action immédiate des esprits animaux & des nerfs pour expliquer les opérations de l'ame: à moins qu'on ne veuille établir pour principe, que parce qu'il y a dans le corps certains mouvemens qui accompagnent ou qui suivent les représentations de l'ame, & dans l'ame certaines représentations qui accompagnent ou qui suivent les mouvemens du corps, l'ame agisse immédiatement sur le corps, & le corps sur l'ame.

Dans la colere le coeur bat avec plus de vitesse & plus de force qu'à l'ordinaire: le mouvement plus rapide du sang rend aussi plus rapide le mouvement du fluide nerveux & des esprits animaux: j'en conviens. Mais que s'ensuit-il de là? L'ame se représente ce qui se passe dans le corps très confusément: s'appercevant d'un plus grand mouvement, elle ne se sent plus portée à fixer le même objet, elle est distraite, & plusieurs représentations différentes se succedent les unes aux autres: mais, comme la loi de continuité exige qu'il y ait un rapport entre ces idées qui se succedent, il arrive que dans cet état une idée étant vivement représentée, celles qui l'accompagnent ou qui la suivent ont avec elle un rapport bien sensible; c'est pour cela qu'un homme en colere se rappelle tout ce qui sert à condamner celui qui échauffe sa bile. Un homme en colere, obsédé des idées claires qui se succédant rapidement reparoissent tour à tour, & de ces idées obscures qui le fatiguent sans qu'il s'en apperçoive, est comme hors de lui; les actes de sa volonté sont aussitôt exécutés que représentés possibles à son esprit: c'est une folie momentanée. L'imagination peint vivement, le corps agité se prête aisément au mouvement, tout est tendu: la sensibilité des parties augmente; l'ame en harmonie avec le corps s'attache aux idées présentes, toute autre idée est écartée: & c'est ce qui fait comprendre pourquoi un homme irrité oublie

oublie en un instant tout ce qu'il se rappelle aisément dans le commun de la vie, & qui l'empêche alors de faire ce qu'il fait dans l'emportement. Dans la tristesse le contraire arrive, & j'aurois tort de perdre du tems à m'arrêter ici.

Dira-t-on enfin, pour combattre l'opinion que je défends, que, l'imagination étant soumise aux mouvemens du corps, il faut pourtant convenir que la folie est l'effet d'un dérangement quelconque du corps? Alléguera-t-on ce que rapporte Mr. de la Condamine, des Omaguas, habitans des environs du fleuve des Amazones, qui ont deux plantes, l'une que les Espagnols appellent *Floripendo*, & l'autre appellée dans le païs *Curupa*, dont ils se servent pour s'enyvrer pendant vingt-quatre heures? Ces plantes prises en infusion, ou comme du tabac en poudre, remplissent l'imagination de ces habitans de toutes sortes de bizarreries, & ils sont alors dans cet état de gaieté, qui semble n'avoir aucune liaison avec leur état précédent. Mais ces plantes font l'effet que produit le vin; & j'ai dit ailleurs ce qu'on peut répondre à cette objection.

L'ame s'apperçoit de ce qui se passe dans le corps, & ses opérations sont analogues aux changemens que le corps éprouve: le corps souffre des impressions de l'ame: mais l'on voit que la folie nait souvent sans que le corps puisse être, en aucune maniere, même une cause éloignée de ce changement extraordinaire. Ce n'est donc alors que dans l'ame même qu'il faut chercher la raison de la folie: & l'y trouver pour un seul cas, c'est l'y trouver pour tous. Il nous restera sans doute toujours quelque chose de difficile à expliquer, sçavoir comment, lorsque la folie est née par des causes psychologiques le corps se détruit & se dérange, & comment lorsque le corps se détraque, il s'ensuit dans les opérations de l'ame des variations analogues à ces dérangemens: mais, quand on aura expliqué comment l'ame est instruite de ce qui se passe hors d'elle, & comment le corps obéit à l'ame, j'expliquerai aussi ce qui reste sur le sujet que je traite de difficile & d'obscur.

Il

Il s'agit de trouver un fysteme qui satisfasse à toutes les difficultés: quand on suppose la spiritualité de l'ame, celui de l'harmonie préétablie paroit y satisfaire plus que tous les autres, & il ne nous manque peut-être qu'une connoissance plus solide de l'ame elle-même, pour prouver la vérité de cette hypothese.

Il suffit ici 1) que la folie puisse naitre & naisse souvent, sans que le corps entre pour rien dans la cause de ce mal, 2) que lorsque la folie est occasionnée par des maladies, ce qui se passe dans l'ame soit un effet de sa propre force, qui agit d'une maniere analogue à ses représentations: l'ame ne pouvant se représenter que ce qui est, 3) enfin qu'on auroit tort de conclure que l'ame perde ses facultés, ou que ses facultés soient altérées, parce que les actions extérieures ne repondent point à son état ordinaire: on n'accusera point un musicien habile de donner de faux tons lorsque son instrument n'est pas accordé.



RE

RÉFLEXIONS SUR LA NATURE ET LES CAUSES DE LA FOLIE.

CINQUIEME MÉMOIRE.

Dans le dernier Mémoire que j'ai eu l'honneur de présenter à cette Assemblée, j'ai cherché à prouver, que ce n'est pas dans quelque altération du corps, qu'il faut chercher la raison immédiate des maladies de l'esprit. J'ai combattu l'opinion contraire, dans la supposition que l'ame fut réellement sujette à des maladies; mais j'avois établi dans un Mémoire précédent, que l'ame ne pouvoit souffrir comme force d'autre dérangement, que celui de l'affoiblissement. Or, comme il ne se perd point de force dans la nature, cet affoiblissement n'est pas même possible dans l'ordre naturel des choses: l'anéantissement de toutes les forces de l'ame seroit sa destruction; & l'anéantissement d'une partie de ses forces l'affoiblissement dont nous parlons. L'un & l'autre ne peut être effectué par les voyes ordinaires de la nature: c'est à Dieu, qui a tout tiré du néant, qu'il faut remonter pour trouver une cause suffisante aux effets, que les loix de la destruction naturelle ne sauroient produire.

Il ne s'agit donc que des maladies apparentes de l'esprit: de ce prétendu affoiblissement, de ce dépérissement apparent des forces de l'ame: ce n'est plus qu'un mal supposé que j'ai expliqué. On voit, il est vrai, dans les vieillards & dans les foux, comme dans les personnes attaquées d'un mal violent, des phénomenes qui semblent indiquer que les opérations de l'ame ne se font plus; mais si la difficulté de s'exprimer dans les gens timides ne prouve pas leur imbécillité, pourra-t-on croire qu'un dérangement assez extraordinaire dans le corps, pour em-

empêcher que les actions ne déposent en faveur de l'usage de la raison, prouve que la raison elle-même soit affoiblie?

En supposant donc l'ame inaltérable, si j'ose ainsi parler, on voit comment des causes physiques peuvent occasionner la folie sans jamais en être la cause efficiente: cela doit arriver toutes les fois qu'elles seront de nature à porter l'imagination à altérer la représentation de l'état présent.

La représentation de cet état présent (extérieur) ne peut être altérée que de deux manieres, l'une en y faisant entrer ce qui n'existe pas, ou ce qui n'existe pas de la maniere dont il est représenté; l'autre en supprimant ce qui existe réellement. Tant que l'ame s'apperçoit que ce qui arrive d'extraordinaire est l'effet d'un dérangement quelconque, il n'y a point de folie; mais, lorsque l'ame, pleine des représentations occasionnées par ce dérangement, s'en rapporte entierement à l'imagination, il y a de la folie, plus ou moins selon les circonstances.

Comme l'ame se représente tout ce qui l'environne, & que ces représentations sont ou obscures ou claires, il est nécessaire qu'un dérangement extraordinaire dans le corps amene dans l'ame des représentations analogues, claires ou obscures; tant que l'ame attribuera ces représentations extraordinaires à quelque état extraordinaire du corps, elle jugera sainement, & n'éprouvera que de la douleur ou de la tristesse: mais, si elle se livre à ces représentations nouvelles, si tout ce que lui peint son imagination lui paroit autant de signes certains de choses réellement existantes hors d'elle, alors ne fixant son attention que sur ces représentations, ces dérangemens du corps pourront être des causes éloignées de la folie.

Il est sans doute impossible d'indiquer quelle espece de dérangemens dans le corps pourroit l'occasionner. Premierement, quelque succès qu'ayent eu les recherches des Anatomistes dans ces derniers tems, il nous reste encore tant de choses à découvrir sur les sensations & sur les organes des sens, qu'il y auroit même de la témérité à hazarder

garder quelques conjectures sur cette matiere: en second lieu, les mêmes dérangemens ne produiront pas toujours les mêmes effets dans différents sujets, l'imagination de différents individus n'étant pas la même. Mais, quels que soient ces dérangemens, il nous suffit ici de savoir qu'il faut qu'ils soient de nature à occasionner une altération dans la représentation que l'ame se fait de l'état présent (extérieur). Quelque petite que soit cette altération, elle présentera à celui qui l'éprouve une chaîne d'idées tout à fait différente de celle qu'il devroit naturellement avoir, elle lui offrira un autre monde: mais un homme qui voit un autre suite de choses que tous les autres hommes, peut-il s'accorder & harmonier avec eux?

Il n'est pas nécessaire de chercher dans le cerveau, & dans les organes les dérangemens propres à occasionner la folie. Tout autre mal peut avoir le même effet: cela dépend de l'imagination du malade. Qu'un homme, par exemple, ait le malheur de perdre ce qui lui est cher; que l'idée de cette perte l'afflige, qu'occupé continuellement de sa perte, il laisse à son imagination plus d'empire qu'il ne lui en faut; on le verra passer insensiblement de la tristesse à la mélancholie, & de la mélancholie à la folie. Ce qu'on peut dire de plus vraisemblable, c'est que quelques dérangemens seront des causes médiates de la folie pour tous les hommes, tandis que d'autres ne le seront que pour quelques uns: que les uns produiront leur effet beaucoup plutôt que d'autres, &c.

Je remarque encore que ce ne seront point les représentations claires qui produiront le plus souvent cet effet: quelque considérables que soient les dérangemens, s'ils sont représentés clairement à l'ame, ils n'auront d'autre effet que de rendre l'état du malade douloureux: & pourvu que celui qui souffre ne s'attriste pas au point de passer, comme je l'ai dit, par degrés de la tristesse à la folie, il n'y a point à craindre pour lui: ce sont les douleurs sourdes & longues qui font naitre ordinairement la tristesse; les douleurs vives & fortes ne durent gueres on voit la joie & la tranquillité succéder bientôt à l'impatien-

ce: c'est ainsi que les représentations obscures sont le plus à craindre; ce sont elles qui font travailler l'imagination, & l'imagination frappée, l'ame se représente l'état présent extérieur tout autrement qu'il n'est: transportant le passé au présent, & effaçant le présent qui est comme éclipsé par les représentations vives de ce qui n'existe pas.

A juger cependant par expérience, il paroit que c'est dans le cerveau que ces dérangements se trouvent le plus souvent. On a remarqué que c'étoit aux yeux qu'on distinguoit communément les foux. En effet il y a des hommes dont le regard annonce ce qu'ils ont à craindre, & rarement trouve-t-on des foux dont les yeux ne décelent le triste état où ils se trouvent. Mais ils ont cela de commun avec tous les hommes: ce n'est qu'une longue étude de la dissimulation, & de la gêne, qui peut apprendre aux hommes à ne pas se trahir par leurs regards. Les yeux sont immobiles & fixés sur un seul objet lorsque notre attention est fixée: celle des foux l'est toujours: leur regard a quelque chose de farouche, parce qu'il est immobile, & il l'est souvent sans qu'ils aient une représentation claire de l'objet qu'ils fixent. Comme il leur importe peu, ou qu'ils n'ont aucune raison, de promener leurs regards, ils sont quelquefois sans aucun mouvement de la prunelle. Cela leur arrive toujours lorsque l'imagination leur peint vivement l'objet de leur folie. D'autres fois il arrive que leurs yeux sont errants, qu'ils les promenent continuellement sur tous les objets qui les environnent, qu'ils fixent même tous ces objets sans en appercevoir aucun.

Après ce que je viens d'établir, oserois-je hazarder de déterminer ce que c'est que la folie; & ce que c'est qu'être foû? Il me semble qu'en rapprochant tout ce que nous appercevons dans les hommes que nous appellons ainsi, & en retranchant de cette idée collective ce qui n'est pas essentiel, on peut appeller fou, un homme qui, éveillé, & jouissant de l'usage de ses sens, se trouve dans un état où il ne distingue plus les représentations que son imagination produit de celles qui sont analogues à ses sensations, & où ses erreurs, démenties

par

par le témoignage des sens, ou opposées aux notions communes, sont le triste fruit des sensations qu'il croit avoir. Qu'au reste cet état soit accompagné de fureur, ou qu'il soit fort tranquille, qu'il ait ou n'ait pas de longs intervalles, qu'il amene peu ou beaucoup d'erreurs, enfin qu'il differe peu ou beaucoup de l'état ordinaire; c'est ce qui ne change rien à la nature même du mal: ce ne sont là que différents degrés d'un mal, qui peut être plus ou moins violent, des modifications d'un état qui peut être modifié d'une infinité de manieres.

Lorsque cet état est l'effet de causes purement morales, il est difficile d'y remédier, on s'apperçoit du mal lorsqu'il n'est plus tems d'y porter remede. Dans le commun de la vie, les premiers accès d'une folie de cette espece ne paroissent que des écarts d'imagination, ou des inconséquences. La raison a de trop longs intervalles, les représentations des objets extérieurs font encore diversion à ces représentations obscures dont l'effet est à craindre. Le mal à son dernier période éclate tout à coup; & alors il n'est plus de ressources que dans quelques intervalles de repos, qui ne servent souvent qu'à empirer le mal.

Mais, si cet état est occasionné par quelques dérangemens que le corps ait souffert, par quelques douleurs, par quelque mouvement extraordinaire des liquides, si cet état, dis-je, est en quelque façon l'effet de causes physiques; alors les remédes pourront quelque chose: il ne s'agira que de sçavoir ce qui est vicié dans le corps, mais cela ne sera point aisé. Le plus grand nombre des foux n'ont pas, surtout dans les commencemens, une maladie bien sérieuse; & souvent, à l'exception d'un sang épaissi, on ne trouve en eux rien qui puisse être l'objet d'une guerison à entreprendre. Ce qui fait qu'on a recours à la Médécine, c'est l'état où les foux se trouvent après un certain espace de tems: si l'on espère les rétablir en guérissant le mal que différens accès ont pu produire dans le corps, on se trompe fort. Lorsqu'un fou s'échauffe, s'irrite, dérange sa façon de vivre, passe les nuits dans les veilles, & ne jouit que rarement du sommeil si nécessaire, il est naturel que sa

santé se dérange. Quand on dit qu'un sang épaissi, après avoir produit le mal hypocondriaque, mot si propre à cacher notre ignorance, peut aussi produire la folie, que dit-on autre chose si ce n'est que ce mal-aise, où un sang épaissi & un corps lourd nous mettent quelquefois, amene naturellement un homme à considérer avec lenteur & avec chagrin certaines idées désagréables, parce que l'ame se représentant l'état du corps se représente aussi cette difficulté de faire jouer les organes, & de varier ses représentations, & parce que l'ame étant active, & cherchant hors de l'état présent de quoi s'occuper, ou se distraire, tombe naturellement sur ce qu'elle craint ou espere pour lors le plus? C'est ordinairement cet état de mal-aise, qui amene ces maladies si singulieres, enfans de l'imagination, comme l'hydrophobie, l'aërophobie: cette répugnance pour l'eau & pour l'air est quelquefois si forte, qu'il y a tout à risquer si l'on veut brusquer le malade.

Il ne faut pas croire que les furieux soient ceux qu'on guérit le plus difficilement. On guérit de la rage. Ce sont les foux les plus tranquilles dont la guerison est la plus désespérée. Quand le corps est bien bouleversé, les changemens que les remedes y produisent, font naître un calme, qui frappant l'esprit en impose souvent à l'imagination: c'est un réveil après un songe effrayant.

Ainsi la rage, la phrénésie, la fievre chaude, le transport au cerveau &c. sont des maladies du corps, où les opérations de l'ame paroissent altérées ou supprimées, parce que le corps ne fait pas ses fonctions, ou ne les fait pas comme il le devroit: la folie est un état où les opérations de l'ame paroissent altérées, ou supprimées, parce que l'imagination dénature ou supprime la représentation de l'état présent extérieur: la mélancholie est un état, où les opérations de l'ame sont moins actives, parce que l'esprit est trop occupé d'idées désagréables: un homme mélancholique se distingue du fou, en ce qu'il ne confond pas les sensations avec les images que présente l'imagination, ou que du moins celà ne lui arrive que très rarement.

De là il est assez naturel de conclure, que, si l'art des Médecins peut porter quelques secours efficaces, c'est dans le cas où des causes phy-

physiques ont dérangé tout à fait l'oeconomie intérieure, & le systême de l'organisation: il faut alors, ou rétablir l'instrument dont l'ame se sert, ou s'attendre à toutes les suites que peut avoir une liaison, sinon interrompue du moins affoiblie, & qui doit rester entiere si, par les actions extérieures du corps, l'ame doit paroitre jouir comme auparavant de toutes ses facultés.

Mais qu'espérera-t-on de la Médecine lorsque ces dérangemens physiques sont l'effet insensible de la folie, ou, pour parler plus clairement, de tout ce que le corps a souffert en conséquence des volontés de l'ame pendant tout le tems où elle s'est trouvée avoir eu l'imagination trop vivement frappée. Les remédes, s'ils ont quelque effet, ne feront autre chose que relever une machine, qu'on abbat un instant après. L'art du Médecin ne peut se montrer que dans la guérison de ces malades, dont les maux ont été de nature à affecter leur imagination: alors c'est à deviner le siege du mal, ou la nature du dérangement, & les remédes propres à rétablir l'état naturel que le Médecin doit employer toute la sagacité dont il est capable.

On m'objectera sans doute qu'il pourroit y avoir des cas, où la Médecine seroit encore d'un puissant secours, bien que le corps n'ait été dérangé qu'ensuite de l'état violent où l'ame s'est trouvée: on me parlera de l'effet de ces frayeurs violentes dans un danger imminent. Mais, si l'on fait attention, que la folie ne peut alors avoir d'autre cause, que l'impression trop vive d'un malheur qu'on croyoit voir arriver, & qu'il est nécessaire que le corps souffre des mouvemens extraordinaires de l'ame, en vertu d'une liaison, qui est encore un phénomene inexplicable, on verra que les secours de la Médecine, pouvant servir peut-être à rétablir le corps, ne pourront pas pour cela ôter de l'esprit l'impression que la vue du danger y a faite. Tout dépend de l'esprit, ou plutôt de l'imagination: le corps pourra se ressentir toujours de la commotion qui s'y est faite, & l'esprit revenir à lui: le corps pourra se rétablir par des remedes donnés à propos, & l'esprit rester frappé de cette représentation qui fait extravaguer. S'il

arrive dônc que l'homme attaqué d'un accès de folie reprenne son bon sens, & garde un corps affoibli ou détraqué, ou bien qu'il persévere dans l'état de folie, quoique son corps ait été rétabli dans son état naturel, pourra-t-on dire que la Médécine ait pu guerir ce fou?

Peut-être pensera-t-on que les effets singuliers de quelques poisons, de quelques philtres &c. si tant est que ces effets soient réels, paroissent non seulement prouver que la folie peut être quelquefois une suite immédiate des dérangemens du corps, mais encore que les remedes peuvent guérir la folie, puisqu'ils ont rétabli plusieurs personnes qui avoient pris de ces philtres, ou de ces poisons, dont l'effet avoit été de déranger leur esprit.

On citera sans doute l'exemple de Lotichius, ce Poëte fameux en Allemagne, qui prétend avoir eu le malheur de perdre la raison, après avoir pris un philtre qu'on lui donna dans une Auberge où il se trouvoit: il raconte que les accès de sa folie ne duroient pas, que les intervalles étoient fréquents & longs, qu'il en devint chauve, mais qu'enfin il fut parfaitement rétabli. Sans contester la vérité d'un fait, attesté par le témoin qui doit être le moins suspect, il s'agiroit de sçavoir si Lotichius ne seroit pas devenu fou sans avoir pris ce philtre; mais je veux supposer encore que sans ce breuvage il ne l'eût jamais été, ne se peut-il pas que ce philtre agissant avec tant de violence, ou pendant un si long espace de tems, l'imagination de ce Poëte vint à être frappée, & que cette imagination une fois affectée, certaines idées le firent extravaguer, jusqu'à ce que les douleurs, les inquietudes, le mal-aise ayant cessé par le moyen de remedes convenables, Lotichius ne se représenta plus ces idées qui le faisoient extravaguer? L'action de ce philtre sur le corps revient à ce qui arrive aux gens pris de vin, ce que j'ai examiné ailleurs: la différence n'est que dans la durée de l'effet.

Ce sont des moyens, d'un genre bien différent de ceux des remédes ordinaires, qu'il faut tenter pour espérer de donner quelque secours à ces malheureux, d'autant plus dignes de pitié, que leur douleur

leur & leurs regrets, dans les intervalles lucides, viennent empoisonner le plaisir qu'ils ont de retrouver l'usage de la raison. Qu'il est triste de n'ouvrir les yeux que pour voir sa misere! Moments de raison achetés bien cher!

Avant de songer au secours qu'on pourroit porter au mal, c'est à son origine qu'il faut penser. Soigneux de la découvrir, par le rapport fidele de ceux qui ont vécu avec le malade, il faut aussi s'attacher à connoitre le caractere & le tempérament de celui qu'on veut guérir.

Partant de cette idée, que la folie consiste surtout en une trop longue & trop vive contemplation d'un seul & même objet, ou d'une seule & même idée, on conçoit qu'elle peut être de différente nature: & que, si les principes sur lesquels on pourroit établir la maniere dont il faut s'y prendre pour la guérir, peuvent être appliqués à tous les cas, ce n'est que comme on applique les principes généraux à des cas particuliers.

C'est donc à distraire le malade qu'il faut porter ses premiers soins: il faut tâcher d'écarter de son esprit l'idée qui y est toujours présente; il faut tâcher de lui faire tourner son attention sur d'autres objets; la multiplicité des représentations obscurcira la représentation fatale: & un intervalle lucide gagné ainsi peut faire esperer d'en gagner de plus longs, & enfin de rétablir le malade. Je conviens de la difficulté de traiter ainsi un malade de cette espece: mais c'est le seul moyen de réussir.

Je ne prétens point exclure les soins & les secours du Médecin; je les regarde même comme nécessaires à certains égards, pourvu qu'on ne confonde pas des choses d'une nature bien différente, & que j'ai cherché à distinguer scrupuleusement. Lorsque la représentation fatale est due à un certain état dérangé, à une douleur, ou à quelque disposition extraordinaire du corps, le Médecin, en rétablissant l'état naturel, en assoupissant la douleur, en changeant la disposition où le corps se trouve, rétablit le malade, lorsque son esprit n'a point

 été

été assez affecté, pour que l'imagination puisse représenter un état passé comme si c'étoit un état présent. Mais cette espece de folie est appellée ainsi fort improprement: ce n'est que la situation d'un homme qui se représente confusément, mais trop vivement, l'état fâcheux où il se trouve; & dans la folie il est essentiel que les fantômes de l'imagination étouffent ou obscurcissent les représentations de l'état présent.

Quelquefois il est aisé de sçavoir l'idée qui a frappé un fou: ou il en parle toujours, ou ses actions la découvrent. Mais il arrive aussi qu'il est assez difficile de la découvrir; soit que les foux ne se la rappellent pas dans les momens lucides, soit que se la rappellant ils n'ont pas le courage de la dire. Cette idée est souvent rélative à des circonstances particulieres qui ne sont connues qu'à la personne intéressée; il se peut même que ce soit une idée qui ne s'apperçoive que dans certains momens, comme cela est assez ordinaire aux foux hypochondres; j'en connois un qui paroit un phénomene inexplicable, si l'on n'a recours à cette supposition. Celui dont je parle est un homme de lettres, qui a de très longs intervalles lucides, qui pendant le tems de son repos raisonne très bien, dont les moeurs sont pures, qui n'est ni bigot ni incrédule, en qui l'on n'apperçoit ni mélancholie, ni dérangement de l'esprit, qui susceptible de sentiment peut éprouver une grande tristesse ou un grande joie, sans être exposé à aucun accès de folie, mais qui de tems à autre s'appercevant que ces malheureux accès vont revenir, va lui même se rendre à la maison des foux, lorsqu'il les sent arriver, & en sort lorsqu'ils sont passés. Cela lui est arrivé plusieurs fois, mais non pas dans des tems reglés: les intervalles ont été quelquefois de six à huit mois.

Un fait semblable, connu à Berlin, & arrivé il y a peu de tems, ne sauroit être expliqué, si l'on ne suppose que cette idée, d'où nait la folie, c'est à dire celle dont l'esprit est alors si frappé, peut quelquefois être tellement obscurcie par d'autres idées ou d'autres représentations qu'il est impossible aux foux de se la rappeller, lorsqu'elle n'agit pas sur l'imagination avec sa violence accoutumée. Cette idée est

est dans l'alternative, ou de n'être point apperçue, ou de l'être avec trop de chaleur pour laisser l'esprit dans son assiette naturelle.

Une Dame, à qui l'on avoit toujours reproché beaucoup de hauteur & un esprit d'un commerce fort difficile, avoit fait souffrir son mari pendant plusieurs années: un matin elle le fit appeller pour se raccommoder avec lui, pour lui demander pardon de toutes ses vivacités & de tous ses emportemens; & lorsque le mari pénétré de ce retour lui témoigne l'envie qu'il a de vivre en paix avec elle, elle lui dit qu'elle avoit été obligée de presser le moment de réconciliation, parce qu'elle étoit assurée que dans trois jours elle seroit enragée. La surprise du mari est facile à imaginer: il ne put jamais découvrir ce qui lui faisoit tenir ce langage: les regrets de sa conduite passée ne parurent point avoir troublé son esprit, la crainte de l'avenir ne parut pas non plus la menacer du même malheur: le mari enfin fut le triste spectateur de la réalité de cette prédiction: cette Dame devint enragée le troisieme jour, & mourut le huitieme dans l'état le plus violent où l'on ait jamais vu un fou.

Dans l'un & l'autre de ces deux cas, on voit qu'il y a une certaine situation de l'ame, où, sortant pour ainsi dire hors d'elle même, elle n'est frappée que d'une idée qui l'agite avec beaucoup de violence, & qui se fait pressentir lors même qu'elle n'est pas encore clairement représentée.

Lorsque je fais réflexion à ce qui arrive à ceux qui, ayant été blessés dangereusement, sentent souvent des douleurs, qui leur indiquent un changement de tems que d'autres ne prevoient pas: je suis tenté de comparer l'état du corps de ces blessés, qui souffrent de l'impression de l'air extérieur, à l'état de l'ame des foux qui dans les momens lucides voyent confusément le danger qui les menace. Un homme digne de foi m'a raconté, qu'un de ses amis ayant un jour vû la foudre tomber sur un arbre auquel il étoit appuyé, sentoit tous les ans au même jour des angoisses terribles, lors même qu'il ne songeoit pas à ce qui lui étoit arrivé.

Ces phénomenes psychologiques, & beaucoup d'autres, sont des misteres inconcevables, si l'on n'a recours à des idées obscures, qui peuvent émouvoir l'ame, comme une douleur sourde peut incommoder un homme, sans qu'il puisse dire ce que c'est qu'il souffre.

Les folies de ce genre sont peut-être incurables: comment écarter des idées, que celui là même qu'elles frappent ne se rappelle plus lorsqu'il revient à lui! Quel moyen pour découvrir d'où & comment nait cette malheureuse idée? Quelque dissipation que nous cherchions à opposer au retour de cette idée, peut-être que cette dissipation même servira à la reproduire avec plus de violence que jamais.

Il s'ensuit de tout ce que je viens d'établir, que, s'il y a quelques secours à espérer des remedes, c'est 1) lorsque la folie a sa source dans la représentation d'un état dérangé du corps, 2) ou lorsqu'ayant sa source dans une idée dont l'imagination a été frappée, les dérangemens physiques qui s'en sont suivis aident à entretenir la folie. Cependant dans l'un & l'autre cas, ces remedes ne sont utiles, qu'autant qu'il est possible de retablir le dérangement physique, & qu'autant qu'il reste encore à l'ame, après la guérison du corps, assez d'empire sur l'imagination, pour que la représentation de l'état passé ne soit pas plus vive que la représentation de l'état actuel, c'est à dire, pour que l'ame ne confonde pas avec les sensations, les fantômes que produit cette imagination, ou ce qui revient au même, pour qu'elle n'altere pas les sensations.

Qu'on juge après cela de la difficulté de la guérison: la nature des dérangemens physiques est presque toujours inconnue, & le rétablissement de ces dérangemens est d'autant plus difficile, que les remedes qui peuvent agir jusques sur le cerveau, sont d'un dangereux usage, & le sont à proportion du degré d'efficacité qu'ils possedent. Mais, toutes ces difficultés étant levées, la guérison n'est pas encore aussi sûre qu'on pourroit le croire: l'imagination frappée une fois est difficilement bridée.

Il

Il en eſt bien autrement encore de toutes ces eſpeces de folie, qui, n'étant pas nées à la ſuite d'un dérangement phyſique, n'en ont produit que de très foibles. Ici le ſecours de la Medécine eſt parfaitement inutile : le ſecours du raiſonnement eſt impoſſible, comme nous l'avons prouvé dans un des Mémoires précédens ; cet homme qui ſe croyoit Dieu le Pere, auroit-on pu le guérir par les remedes, ou par le raiſonnement ?

Quand on réfléchit ſur les abus infinis qui regnent dans ces triſtes aziles où l'on enferme les foux, on déſeſpere de parvenir à recueillir aſſez d'expériences pour guider heureuſement ceux qui veulent ſoulager ces malheureuſes victimes de l'imagination. L'humanité ſembleroit demander qu'on fit les plus grands efforts pour les ſoulager ou les guérir ; le coeur eſt déchiré à la vue de pareils maux : & peu d'hommes cependant peuvent s'aſſurer de n'être jamais expoſés à les ſouffrir, à moins de prendre pour aſſuré qu'il ne nous arrivera jamais ce qui arrive rarement.

RÉFLEXIONS PHILOSOPHIQUES SUR L'UTILITÉ DE LA POËSIE DRAMATIQUE *).

PAR M. SULZER.

La Poësie dramatique a cela de commun avec plusieurs autres établissemens importants, qu'on la doit plutôt au hazard & à plusieurs changemens successifs, qu'aux vues de celui qui en est l'inventeur. Nous ignorons en quel tems & en quel lieu les spectacles qui ont produit la Poësie dramatique, ont pris naissance. Les Grecs s'en disent les inventeurs, comme des autres beaux-arts. Mais il est probable qu'ils les ont reçus de quelque peuple plus ancien qu'eux. Toutefois l'histoire qu'ils nous donnent de leur commencement & de leurs progrès, est assez dans le vrai. Le premier germe, duquel on vit éclorre longtems après la Poësie dramatique, n'étoit qu'un divertissement passager auquel se livroient des vignerons après la vendange. Bientôt ce divertissement devint un usage annuel; puis une cérémonie religieuse, qui dégénéra ensuite en une farce, que quelques Poëtes, conduits par un goût supérieur, ont changée peu à peu en un spectacle régulier & très intéressant, dans lequel la Poësie, la Musique, & la Philosophie même, étalent ce qu'elles ont de plus sublime.

Du tems de *Solon* ce qu'on appelle *Tragédie* n'étoit qu'une farce avec laquelle un Poëte, nommé *Thespis*, amusoit la populace d'Athenes. Ce sage Législateur, ne prévoyant pas à quel point ce spectacle pour-

*) Lû dans l'Assemblée publique du 5 Juin, 1760.

pourroit être ennobli, le défendit *). Quelque tems après, des Poëtes plus philosophes que *Thespis* le perfectionnerent au point que, malgré le respect qu'on avoit pour les loix de *Solon*, il fut autorisé par les Loix, & fit même partie d'une des Fêtes les plus respectables. Les Athéniens étoient si éloignés de croire que ce spectacle perfectionné fût dangereux, ou seulement inutile, qu'ils dépenserent des sommes immenses pour le soutenir avec dignité. Un Auteur ancien rapporte qu'une des Tragédies de *Sophocle* coûta plus au trésor public que toute la guerre contre les Perses.

Après que le Théatre fut perfectionné par *Eschyle*, par *Sophocle*, & par *Euripide*, personne ne s'avisa de le regarder comme préjudiciable aux bonnes moeurs. On y vit souvent *Socrate* entouré de ses disciples. En effet il faudroit avoir une étrange morale pour condamner la représentation des Tragédies Grecques qui nous restent, si l'on en excepte une ou deux. Les Romains avoient introduit ces spectacles dès les premiers tems de la Rèpublique. Mais, très inférieurs aux Athéniens dans la délicatesse du goût & des sentimens, ils ne sçurent pas l'ennoblir comme eux. Le Théatre conserva toujours à Rome quelque reste du mauvais goût & de l'indécence qui le caractérisoient dans sa premiere institution. La grande dépravation des moeurs, dans les derniers tems de la République & sous les Empereurs, affecta aussi le Théatre, surtout après qu'on y eût produit les Mimes, les Pantomimes & les Baladins. On n'y voyoit alors que des représentations obscenes, deshonnêtes, & même infames. Ces spectacles dangereux se sont attiré les censures des Philosophes & de ces premiers Docteurs Chrétiens qu'on nomme les Peres de l'Eglise: & c'est depuis ce tems-là que, dans plusieurs païs, il y a un opprobre attaché à la profession d'Acteur. C'est ainsi que le Théatre a conservé jusqu'à nos jours une partie de sa mauvaise réputation, malgré la réforme considérable qu'on y a faite. Depuis peu un homme celebre a tâché de lui porter le coup mortel, en le représentant comme très dangereux aux moeurs.

Le

*) Voyez *Diogene Laërce* dans *Solon*.

Le goût de tous les peuples policés décide en faveur du Théatre; & aucun raisonnement ne le fera abolir. Au lieu donc de vouloir détruire un établissement que le goût soutiendra toujours, il vaut mieux tâcher de le perfectionner, & de le rendre vrayement utile, si cela est possible. Il faut voir, si, malgré les taches qui défigurent le Théatre, on peut y découvrir quelque mérite supérieur aux défauts. C'est ce que je me propose d'examiner dans ce Discours.

Pour juger sans prévention de la valeur morale du Théatre, il ne faut point insister sur une de ses formes particulieres. Il y a sans doute des Pieces de Théatre qui ne produisent aucun bien, ni sur l'esprit, ni sur le coeur des spectateurs, qui sont même préjudiciables aux bonnes moeurs. Je conviens qu'il y a beaucoup de vrai dans ce que M. Rousseau dit au désavantage de ces spectacles. Il y en a qui présentent exactement ce qu'*Horace* nomme

Peccare docentes historias *),

des histoires qui enseignent à trahir la vertu.

Mais il ne s'ensuit pas de là que tout le genre soit vicieux, & que l'institution en général soit nuisible aux bonnes moeurs. Je ne considérerai pas ici le Théatre tel qu'il est aujourdhui, mais tel qu'il pourroit être, en conservant son agrément; & je crois que, sans aucun sophisme, & sans amener les raisons de bien loin, on peut prouver que la Poësie dramatique en général est une des inventions les plus utiles, & que le Théatre peut devenir un des établissemens les plus respectables.

Au fond, une Piece dramatique n'est qu'une représentation vraye & naturelle d'une action intéressante, qui produit quelque événement heureux ou malheureux, dans un Etat, dans une famille, ou dans la vie d'un seul homme. Qu'y a-t-il dans cette notion de la Poësie dramatique, qui puisse nous la rendre suspecte? Un Poëte sans moeurs & sans principes peut sans doute représenter une action peu édifiante, peu instructive, & même scandaleuse; mais il est également possible qu'on choisisse une action très instructive pour ceux qui la voyent, & qui produise de très bons effets sur la façon de penser & sur

*) Hor. Od. L. III. od. 7.

sur les sentimens des spectateurs. Le Théatre par sa nature n'exige point de sujet qui ait absolument le défaut de gâter l'esprit ou les sentimens du spectateur. Je ne crois pas que personne s'avise de soutenir que, sans ces défauts, une action ne pourroit être intéressante rélativement au Théatre. Car, on pourroit citer un bon nombre de Tragédies & de Comédies qui ont eu beaucoup de succès sans avoir ces défauts. Or il n'est pas difficile de prouver qu'une telle action, maniée par un Poëte philosophe, & représentée au Théatre, peut être très utile aux spectateurs.

Je remarque d'abord que, dans la façon de nous faire connoitre une action intéressante, le Poëte a beaucoup d'avantage sur l'Historien, indépendamment même de la représentation. Sans sortir de la vérité des faits, il les présente dans le point de vue le plus avantageux, en éloignant tout ce qui n'est pas essentiel, en découvrant les ressorts les plus cachés qui font agir les hommes. L'action peinte dans le drame est un *Beau idéal.* Comme un amant passionné ne voit pas dans la personne aimée une beauté limitée, telle qu'elle est dans la nature, mais une beauté celeste que forme son imagination exaltée, de même le Poëte nous représente l'action perfectionnée par son génie: & c'est par là qu'il nous frappe bien plus fortement que l'Historien. L'action théatrale est un tableau d'une belle ordonnance, d'un beau coloris & d'une grande force d'expression; l'action décrite par l'Historien est un dessein sans ordonnance tracé pour faire connoitre historiquement le fait dont il s'agit. Il est vrai que le Poëte ne reste pas dans la vérité historique. Mais ses fictions mêmes sont dans la vérité de la nature morale: elles sont fausses par rapport aux tems, aux lieux & au noms des personnes, mais très vrayés par rapport aux situations & aux caracteres. L'action dramatique ne donne pas le fait, tel qu'un témoin oculaire l'auroit vû, mais tel que le verroit une intelligence supérieure qui lit dans les coeurs, qui pénetre dans l'intérieur des choses, & qui en éloigne tout ce qui n'y est pas essentiel, pour en avoir une idée plus juste & plus frappante.

On peut même soutenir, sans rien outrer, que la Poësie dramatique nous instruit beaucoup mieux que l'expérience, vû que la plupart du tems celle-ci ne nous présente que le dehors des personnes. Il n'y a point d'état, point de condition, point de situation importante dans la vie, soit publique, soit privée, que la Poësie dramatique ne sçache peindre de façon à ne nous y rien laisser ignorer. Le Poëte rassemble les traits qui servent à caractériser ces différentes rélations; il rapproche les faits, & il découvre ce que l'expérience même nous cache. Veut-il nous instruire des embarras de la grandeur? Il trouve moyen de nous introduire dans le cabinet d'un Grand; & non content de nous faire voir toutes les marques extérieures de son embarras, il le rend éloquent: les expressions les plus énergiques, les remarques les plus fines, nous peignent vivement les inquiétudes & les chagrins, qui accompagnent la grandeur. Que les Grands sont quelquefois accablés de chagrins au milieu de la gloire qui paroit les entourer: c'est une remarque triviale qui ne frappe pas beaucoup. Mais, si dans *l'Iphigénie en Aulide d'Euripide*, nous en voyons l'exemple, nous sommes vivement touchés. On sait par mille événemens, que les plus puissantes Maisons souveraines sont sujettes à de grands revers & à de grandes calamités. L'*Andromaque*, ou l'*Hecube* du Poëte Grec rendent témoin de cette vérité d'une façon qui fait frémir; & l'idée en reste vivement imprimée pendant toute la vie.

Dans le monde même, les objets qu'il importe le plus de connoitre & d'approfondir, s'offrent rarement à notre vue tels qu'ils sont. Mille choses concourent à déguiser l'homme, à nous donner le change sur les biens & les maux, sur le mérite & le crime. On ne voit ces objets dans leur vrai jour qu'après avoir fait mille réflexions que tout le monde n'est pas capable de faire, & on ne parvient à ces connoissances que lorsqu'il est trop tard d'en profiter. Le Théatre peut abréger cette route; on y voit l'homme, comme on ne le voit que très rarement dans la société, à découvert, sans fard, sans dissimulation & sans la moindre ombre de réserve. Chacun y pen-

pense tout haut; & dans les affaires les plus importantes, dans les épanchemens les plus secrets de l'ame, le spectateur est le confident de l'Acteur. Le Poëte, après avoir passé la meilleure partie de sa vie à approfondir les différens caracteres des hommes, à connoître à fond les passions, à observer dans leurs vrais jours les vertus & les vices, à peser le bien & le mal attachés aux états & aux conditions qui distinguent les hommes, à saisir les points de vue propres à faire bien juger de chaque situation importante; étale ses précieuses connoissances dans la Poësie dramatique: & il le fait d'une façon à nous communiquer en peu de tems, & de la maniere la plus énergique, ce qu'il n'a connu lui-même qu'après une longue suite d'observations & de réflexions. Voilà en général en quoi consistent les avantages de ce genre de Poësie. Je ne crois pas qu'il y ait rien d'outré dans ce tableau. Le Poëte philosophe, tel que je l'ai supposé, n'est pas un être imaginaire; & les sujets tels que je les demande pour les Pieces dramatiques s'offrent de tous côtés, pourvû que le Poëte ait assez de génie pour créer de nouvelles formes.

Après ces remarques générales, nous allons considérer quelques avantages particuliers de la Poësie dramatique. D'abord, il est visible qu'il n'y a aucun genre aussi propre que celui-ci à donner des exemples & des modeles des vertus. *Platon* a dit, que l'homme deviendroit éperduement amoureux de la vertu, s'il pouvoit la voir sous une forme visible. Il n'y a que la Poësie dramatique qui puisse donner cette forme à la vertu. Le Poëte peut arranger l'action de façon que l'homme vertueux y paroisse dans tout éclat possible. Je sais bien que, d'après un ancien préjugé, les Pieces dramatiques sont ordinairement arrangées de façon que la vertu succombe, pour exciter la compassion. Mais l'estime poussée jusqu'à l'admiration n'est, ni moins douce, ni moins vive que la compassion, par conséquent rien n'empêche le Poëte, de représenter la vertu supérieure à tout ce qui lui est opposé. Rien ne l'empêche de nous montrer une jeune homme qui, comme *Hercule*, est supérieur aux attraits de la volupté, & qui, malgré les enchantemens du vice, se jette dans les bras de la vertu & y trouve sa récompense.

 Une

Une catastrophe heureuse aura-t-elle moins de charmes qu'une catastrophe malheureuse? Qu'est-ce qui pourroit intéresser davantage qu'un Souverain, qui, au milieu des malheurs publics, est le pere de ses peuples, un Ministre fidele à sa patrie, qui est le boulevard des citoyens contre un Tyran, un homme integre, dont la probité est supérieure à la méchanceté des Courtisans & qui, après de longs combats, triomphe de ses ennemis? Le Poëte seul est capable de représenter les vertus dans tout leur éclat, en rassemblant les faits, en amenant les situations les plus frappantes, en leur donnant du relief par des contrastes, en leurs opposant les plus grandes difficultés. Tous ces moyens qui rendent l'action théatrale tout à fait intéressante, sont en même tems très propres à faire briller la vertu.

La satisfaction intérieure qui récompense les bonnes actions, & le bonheur qui est le prix de la vertu, sont encore des objets importans que le seul Poëte dramatique peut nous faire sentir avec cette énergie qui nous enflamme du desir de nous l'approprier.

D'un autre côté, la méchanceté & le crime, dévoilés sur le théatre, peuvent produire de grands effets. Il importe d'autant plus de recourir à ce moyen de démasquer le scelerat, qu'il est rare de le voir dans la nature sous sa vraye forme. Combien de scélérats ne voit-on point entourés d'un nuage brillant de fortune & de bonheur? Et quel dangereux exemple cela ne donne-t-il point à des ames honnêtes qui ne pénétrent pas dans l'intérieur de cette félicité apparente? Qu'on produise donc ces faux heureux sur le Théatre, afin que tout le monde y voye avec quelle vitesse ce faux bonheur disparoit au moment que le scélérat est seul & abandonné à la réflexion! Le spectateur sera témoin des inquiétudes mortelles & des passions dévorantes qui l'accablent; il l'entendra détester ce prétendu bonheur, & il aura de l'horreur d'une situation, qu'il étoit tenté d'envier.

J'avoue que ces salutaires effets que j'attribue à la Poësie dramatique me paroissent si vrais & si incontestables, que je suis surpris qu'on en ait pu douter. *Je voudrois bien*, dit M. Rousseau, *qu'on me*

mon-

montrât clairement & sans verbiage, par quel moyen le Théâtre peut produire en nous des sentimens que nous n'avons pas, & nous faire juger autrement des êtres moraux que nous en jugeons nous-mêmes. J'ose le dire; je crois voir fort clairement, ce que cet homme si pénétrant, n'a pu voir.

Il est vrai que le goût du beau & du bon paroit être antérieur à toute institution. Mais qu'on ne s'y trompe pas. Ces germes sont si foibles au fond de l'ame, qu'il est très facile de les étouffer. Combien n'y a-t-on point d'exemples, que des sentimens qui paroissent innés & indestructibles, ayent été entierement effacés? L'homme né avec un jugement droit & de bons sentimens, n'en profitera pas beaucoup, s'il a le malheur de vivre parmi des hommes corrompus. Il prend leurs sentimens, leurs préjugés & leurs moeurs, quelque opposés qu'ils soyent à la bonté naturelle de son caractere. On a vu des hommes courageux & magnanimes, devenir peu à peu lâches & pusillanimes pour avoir vêcu avec des gens de ce caractere; on a vu des hommes d'un grand sens & qui possédoient de grandes lumieres acquises, tomber dans des superstitions puériles, pour avoir vêcu avec des foux superstitieux. D'où il vient que des Nations entieres ont des préjugés qui font honte à la raison, & des sentimens qui dégradent l'homme?

Cela ne prouve-t-il pas clairement que nos sentimens, nos goûts, & le jugement que nous portons des êtres moraux, dépendent beaucoup des exemples que nous voyons? Or n'est-il pas infiniment rare que l'expérience même nous offre ces exemples sous un point de vue aussi frappant, que le Théatre peut le faire? Il semble qu'avec beaucoup plus de raison, la demande de M. *Rousseau* seroit applicable à la Peinture. Cependant on pourroit répondre qu'un jeune débauché revint des desordres de sa vie pour avoir été vivement frappé par un tableau *), & qu'*Aristote* a remarqué qu'il y a des tableaux qui ont plus de force sur l'homme que les meilleurs préceptes de la Morale **).

 On

*) Cette histoire est racontée par S. Grégoire de Nazianze.

**) *Arist. Politic.* L. V.

On a vû des personnes revenir subitement des égaremens auxquels elles paroissoient livrées pour toujours, & changer en très peu de tems de moeurs & de sentimens, au point de devenir méconnoissables: souvent un seul & unique exemple, bien frappant, du bonheur que produit la vertu, ou du malheur que produit le crime, a suffi pour opérer une révolution si heureuse. La Poësie dramatique est très propre à donner ces exemples. Le Poëte est un Magicien, qui, d'un seul coup de baguette, peut rompre le charme de l'illusion fatale, qui enchainoit l'imagination & le coeur. Si l'homme né méchant ne peut être ramené à l'honnêteté, ni par l'exemple, ni par le précepte, au moins celui qui n'est livré au vice que par illusion, peut être ramené; & rien n'est plus capable d'opérer cet effet, qu'un tableau frappant, tel que le Théatre seul peut le donner. Ces malheureux que rien ne peut corriger, sont plus rares qu'on ne croit. Le grand nombre renferme en soi les germes de la raison & de l'honnêteté, qui se développent d'autant plus promptement qu'ils ont été gênés par le préjugé. Un seul trait de lumiere dissipe quelquefois un grand nombre de ces préjugés, & fait triompher la raison. La Poësie dramatique en fournit l'occasion mieux que tout autre arrangement.

Cette remarque me conduit naturellement à faire observer la force des belles *sentences*, estimées comme une partie considérable de la Poësie dramatique. Quelque grande que soit une vérité, elle ne frappe vivement que lorsqu'elle est placée bien à propos. Le vrai qui ne tient qu'à la partie supérieure de l'ame, ou à l'entendement, n'a aucune force sur nous; il est de pure spéculation comme sont les vérités de Géométrie. Mais, lié à l'imagination & au coeur, il devint un principe actif, en réglant nos sentimens & nos actions. Ceux qui aiment à lire des pensées ou des réflexions détachées, & des maximes dans le goût de celles de *la Rochefoucault*, se seront souvent apperçus qu'il y en a quelques unes qui frappent extraordinairement. On peut encore observer que chaque lecteur en choisit un petit nombre qu'il trouve supérieurement vrayes & bonnes. Ces pensées sont celles qui tiennent à des tableaux, ou à des scenes présentes à notre imagination, & qui

nous

nous rendent ces vérités ſenſibles. Il en eſt comme de ces vérités qui ſont la morale des fables; ſeules, elles font fort peu d'impreſſion; mais, ſi l'imagination eſt vivement frappée par le tableau que lui préſente la fable, la morale en prend une force ſupérieure, & reſte ineffaçablement dans l'eſprit.

Or, de tous les genres de Poëſie, le genre dramatique eſt le plus propre à donner cette grande force aux ſentences, parce qu'il préſente les tableaux les plus frappans. Le Poëte, après avoir fixé notre attention ſur une ſcene intéreſſante, qui s'empare de toute la force de l'ame, lance deux ou trois mots qui ſont l'ame des images dont nous ſommes ſi vivement frappés: & c'eſt par là que nous ſaiſiſſons ces vérités avec la plus grande vivacité & avec une conviction que rien ne peut affoiblir. Si jamais la vérité peut faire impreſſion ſur l'homme, c'eſt dans ces occaſions où toute ſon ame eſt déjà prévenue en ſa faveur.

Si la vérité acquiert ſa plus grande force par les images ſous lesquelles elle devient ſenſible, la Poëſie dramatique obtient encore un avantage qui mérite d'être mûrement peſé. Dans toute l'étendue du monde moral, il n'y a aucun genre d'objets qui ne puiſſe entrer dans la Poëſie dramatique. Caracteres, ſentimens, bonnes ou mauvaiſes actions, ſituations délicates, dangereuſes ou heureuſes, tout cela eſt du reſſort de l'action théatrale. Un homme qui auroit longtems fréquenté un bon Théatre, poſſéderoit un magazin d'images qui renfermeroit toutes les vérités morales ſous des formes matérielles. Muni de ces connoiſſances, il en tireroit un avantage infini pour le diſcours. Un ſeul nom lui tiendroit lieu d'une définition, une ſimple alluſion lui épargneroit ſouvent un long diſcours. Pour appuyer ou pour fortifier des réflexions importantes, il n'auroit qu'a rappeller à l'auditeur une de ces ſcenes vivement peintes dans ſon imagination. Les ſeuls noms de *Tartuffe*, ou d'*Harpagon*, définiſſent mieux le dévot impoſteur & l'avare, que tout ce que le premier philoſophe du monde pourroit exprimer par des définitions. Si vous pouvez dire à un jeu-

ne

ne homme prêt à s'égarer: *Mon ami, rappelle-toi Barneveldt* *) vous le frapperez plus fortement par ces deux mots, que par les exhortations les mieux raisonnées.

On ne peut avoir trop de ces images instructives qui donnent une si grande force au discours: & les Moralistes n'évitent le verbiage dans leurs Ecrits, qu'autant qu'ils peuvent se servir de pareilles allusions. Les Anciens avoient pour cela leur Mythologie, leur Homere, & les Pieces du Théatre grec; tous ceux qui lisent les anciens, savent quels avantages ils ont tiré de ces images. L'Empereur *Auguste*, déplorant souvent les égaremens honteux d'*Agrippa* & des deux *Julies*, récitoit un vers d'Homere **) qui peignoit mieux les malheurs de sa maison que tout ce qu'il pouvoit dire. Or il semble que, par un bon Théatre, on pourroit répandre dans le public cette espece de connoissance.

Je viens à un autre avantage de la Poësie dramatique. *Quelquefois j'ai espéré*, dit un Homme célébre ***), *qu'on discuteroit au théatre les points de morale les plus importans, sans nuire à la marche violente & rapide de l'action dramatique. De quoi s'agiroit-il en effet? De disposer le poëme de maniere que les choses y fussent amenées comme l'abdication de l'Empire dans Cinna. C'est ainsi que le Poëte agiteroit la question sur le suicide, de l'honneur, du duel, de la folie des dignités*, &c. Je suis entierement de l'avis de ce Philosophe. J'ajoute que de pareilles discussions, qu'un Poëte habile peut toujours amener naturellement, deviennent beaucoup plus intéressantes sur le Théatre, qu'elles ne seroient dans tout autre genre. Car les matieres de discussion

*) Personnage principal dans la Tragédie Angloise intitulée le *Marchand de Londres*.

**) Αἴθ' ὄφελες τ' ἄγονός τ' ἔμεναι, ἄγαμός τ' ἀπολέσθαι,
C'est un mot qu'*Hector* dit à Paris, en lui reprochant les maux infinis qu'il fit à sa famille & à son pais, & dont le sens est: *Plût aux Dieux que tu ne fusses pas né, ou que tu eusses péri avant de te marier!* Il y a une petit équivoque dans le mot ἄγονος, qui fait que ce vers peut être appliqué à *Auguste* même, dans ce sens. *Plût aux Dieux que je n'eusses point procréé d'enfans ou que je fusse mort dans le celibat!*

***) M. *Diderot*.

sion ne sont vrayement intéressantes que par des déterminations personelles & locales. L'illusion théatrale nous met à la place des personnes intéressées dans l'action. Alors il ne s'agit plus d'une simple spéculation. Placés par l'illusion dans des situations très importantes, nous nous sentons pressés de prendre un parti; l'ame s'échauffe, & toutes ses forces se réunissent sur l'objet important dont il s'agit. Nous en avons un exemple dans le fameux monologue de *Hamlet*, dans la Tragédie de *Shakespeare*. Peut-on douter que dans ces circonstances on soit plus vivement frappé, que si la même matiere étoit discutée dans une Chaire de College?

Je m'arrête ici, parce que je crois que ce que j'ai remarqué suffit pour prouver que la Poësie dramatique peut être de la plus grande utilité. M. *Rousseau* qui, sans doute, a bien senti cela, prétend qu'un Théatre utile, & tel que nous le supposons, est une chimere. „On ne corrigera jamais, dit il, le goût & les moeurs par le théatre, „parce que les pieces qui choquent les moeurs dominantes, ne réussi„ront pas." Je réponds à cela qu'il ne s'agit pas toujours d'attaquer des moeurs & des opinions nationales. Du tems de *Moliere*, cette race singuliere de *Précieuses ridicules* pouvoit être sifflée sans attaquer le caractere national des François. Le Poëte le fit avec beaucoup de succès: & *Aristophane* attaqua très vivement les moeurs du peuple Athénien, sans diminuer le nombre des spectateurs. D'ailleurs, il ne me paroit pas généralement vrai, que tout ce qui n'est pas dans nos moeurs, nous choque. Il n'y a que les Nations barbares, qui soyent opiniâtrement attachées à leurs moeurs, & sur lesquelles d'autres moeurs ne fassent aucune impression. Dans toute Nation policée, il y a un nombre de personnes raisonnables qui désapprouvent bien des choses assez généralement reçues, & qui gémissent sous un joug dont elles souhaitent d'être debarassées. Ceux qui ont assez de fermeté pour quitter le chemin battu, en entraînent quelquefois d'autres, qui par eux-mêmes n'y auroient jamais pensé; & cela produit souvent des effets heureux sur tout un public. Enfin, quel que soit le caractere national d'un peuple, il y a parmi les particuliers des vertus & des vices, qui

qui ne sont pas ceux de tout le monde. Rien n'empêche donc le Poëte de travailler à fortifier les unes, & à s'opposer aux autres. Je conviens que, parmi les *Hurons*, une Piece dans le goût françois ne réussiroit pas; que l'*Avare* de Moliere tomberoit dès la premiere représentation, si tous les spectateurs étoient des *Harpagons*: je conviens encore que le Théâtre ne donnera à personne des sentimens dont la nature a refusé le premier germe, ni une façon de penser qui surpasse le dégré de conception que la Nature a accordé aux spectateurs. Mais je ne vois pas que le Théâtre cesse pour cela d'être utile. Y a-t-il un peuple sur la terre sans disposition naturelle pour un plus haut degré de vertu que celui qu'il a, ou sans aucune capacité de se corriger de quelquesuns de ses défauts? Chez un tel peuple, s'il existoit, le Théâtre ne seroit pas plus inutile que tout autre établissement formé pour perfectionner l'homme moral. Mais le cas n'existe certainement pas. Il en est des moeurs & des opinions comme du goût, qui se perfectionne insensiblement par de bons modeles. Les Monumens antiques tirés de dessous les ruines de l'ancienne Rome n'étoient assurément pas dans le goût dominant des Italiens, lorsque quelques génies heureux commencerent à les imiter. C'est pourtant ce qui a produit une révolution totale dans le goût. Un petit nombre de modéles antiques détruisit le goût gothique dans l'Architecture & dans le Dessein. Je ne crois pas qu'on puisse dire, que l'homme soit plus opiniâtre en fait de moeurs que dans les affaires de goût. Si donc les Poëtes dramatiques vouloient rendre à leurs concitoyens le même service en fait de morale, que les *Bramante*, les *Michel-Ange* & les *Raphaël*, ont rendu aux leurs, en fait de goût; je pense qu'ils ne réussiroient pas moins à produire une révolution heureuse.

Je crois que ces remarques suffisent pour prouver que la Poësie dramatique peut être très utile. Il me reste encore à considérer le Théâtre comme simple spectacle. C'est principalement par ce côté là qu'il s'est attiré la censure des Moralistes rigides. Toutefois, si ces spectacles n'étoient qu'une bonne représentation de Poëmes dramatiques, tels que nous les avons supposés dans tout ce Discours, je ne vois

vois pas ce qu'il y auroit à censurer. Au contraire, s'il y a quelque Piece dramatique dont la lecture soit utile, la même Piece bien représentée, produira beaucoup plus d'effet, puisque ce n'est que par la représentation que les tableaux du Poëte acquierent toute leur force. L'Orateur *Eschyle* dit aux Rhodiens qui admiroient une Harangue de *Demosthene* que celui-ci leur avoit récitée: *Eh! qu'auriez vous dit, Messieurs, si vous aviez entendu Demosthene même?* Ajoutons à cela l'ingénieuse remarque de l'illustre *Bacon*, que les hommes assemblés en grand nombre sont plus susceptibles d'être touchés, qu'étant seuls. Enfin, l'illusion produite par une bonne exécution acheve nécessairement de donner toute la force possible aux bonnes impressions que le Poëte veut produire.

Je ne disconviens pas qu'il n'y ait de très grands défauts dans les Théatres modernes, rélativement à l'exécution. Mais ces défauts n'y sont point essentiels; & on y remédieroit fort facilement, si le pouvoir législatif daignoit s'en mêler. Cela se faisoit à *Athénes* où aucune piece ne pouvoit être représentée qu'elle n'eût été examinée par quelques Magistrats, qui en même tems étoient chargés de veiller à ce que l'exécution fût parfaite.

Même à ne considérer les spectacles que comme un simple amusement, ils n'ont rien qui ne soit digne de la raison la plus éclairée; pourvu qu'on y corrige quelques défauts: ce qui est très facile à faire. N'y eût-il d'autre avantage que celui d'inspirer à des hommes oisifs le goût de réfléchir sur des êtres moraux, sur des caracteres, sur les passions, sur les divers événemens de la vie &c. c'en seroit assez, pour rendre cet amusement important. Or c'est certainement l'effet le plus naturel que le Théatre produise.

Je ne crains point avec M. Rousseau, que les spectacles entrainent un public laborieux dans la dissipation; je crois plutôt que, pour peu qu'un Théatre soit bien dirigé, il pourroit produire l'effet contraire. On sait ce que valent dans les petits Etats les amusemens d'un peuple laborieux, & combien coûtent ordinairement aux femmes & aux enfans une ou deux heures que le pere de famille passe au cabaret ou à la chasse. On sait encore ce que c'est que les amusemens de société des person-

nes d'un rang plus élevé. Si les spectacles étoient ce qu'ils peuvent être très facilement, une mere de famille rempliroit bien mieux son devoir en accompagnant ses enfans au spectacle, qu'en les menant dans un cercle où l'on ne voit ni n'entend rien qui ne soit frivole. Elle en tireroit encore l'avantage de gagner au spectacle un fond de matiere pour s'entretenir avec sa famille sur des objets qui doivent nécessairement entrer dans les connoissances d'une jeunesse bien élevée. Rien n'est ordinairement plus froid que les entretiens de famille dès qu'il s'agit de sujets de morale. Si un bon spectacle en fournissoit la matiere, ces entretiens deviendroient également utiles & agréables.

Je le répete pourtant; il s'en faut beaucoup que les meilleurs Théatres soient tels, qu'on en puisse attendre les heureux effets dont nous venons de parler. Parmi le grand nombre de Pieces dramatiques, il y en a très peu qui méritent une entiere approbation; & le reste de ce qui appartient au Théatre est très rarement ce qu'il devroit être pour éviter la censure des honnêtes gens. Mais, en condamnant les defauts & les abus du Théatre, il ne faut pas s'opposer au bon usage qu'on en peut faire. A Athenes, *Sophocle* Poëte & Acteur, fut jugé digne de gouverner l'Etat conjointement avec le Grand *Péricles*. Si l'on vouloit perfectionner le Théatre, je ne vois pas ce qui empêcheroit les personnes du premier mérite & des moeurs les plus pures, de devenir utiles au public, par un métier qui, les abus ôtés, peut devenir un des plus respectables.

Il existe déjà des Pieces de théatre qui répondent à la haute idée que j'ai donnée de la Poësie dramatique; & je crois qu'il y a des Acteurs dignes de les représenter. Déjà on voit des génies heureux qui franchissent les bornes que le mauvais goût sembloit avoir prescrites à ce genre, & qui par de nouvelles routes s'élevent bien au dessus de leurs prédecesseurs. Il y a lieu d'espérer que quelques circonstances favorables rendront au Théatre la dignité qu'il avoit dans les beaux tems de la République d'Athenes.

SUR

SUR
LE DÉSIR.
PAR M. MERIAN.

Les choses qui sont le plus près de nous, sont presque toujours celles que nous connoissons le moins. Toute notre vie se passe dans les désirs; & l'on dispute encore si le Désir est un bien ou un mal, un plaisir ou une peine.

Tandis que les uns ne conçoivent point de désir sans un mal-aise, ou un sentiment désagréable; d'autres vous diront que le Désir est un sentiment délicieux, un plaisir par excellence; peu s'en faut qu'ils n'y fassent consister le bien suprême.

Comme ces deux opinions contraires sont soutenues par des autorités également respectables, je croirois volontiers qu'il y a du vrai & du faux dans l'une & dans l'autre. Mais comment le démêler?

Lorsque, dans le Regne de la Nature, il se présente un objet à caracteres équivoques, & qu'on ne sait sous quelle classe le ranger, comment l'observateur s'y prend-il? Il analyse cet objet avec soin, le contemple à travers le microscope, ou le décompose jusque dans ses élémens. Alors il se trouve, ou que cet objet appartient à un genre déjà connu, ou qu'il participe de plusieurs genres, ou qu'il forme lui-même un genre nouveau. Nos recherches exigent ici une opération analogue; car la Psychologie est l'Histoire Naturelle de l'ame.

Cherchons donc la notion du Désir dans le siege même du Désir, au fond de nos coeurs, & voyons ce qui se passe en nous lorsque nous désirons. Or il me semble y appercevoir trois choses, 1. un objet qui se peint à l'Imagination sous une forme agréable, 2. une in-

quiétude, causée par l'absence de cet objet, inquiétude qui nous rend mécontens de la situation où nous sommes, 3. une espece d'attraction que cet objet exerce sur nous, ou de notre part une tendance vers le bien que nous nous y figurons, & qui n'existe encore pour nous qu'en idée.

Le Désir, composé de ces trois perceptions, sensations, ou sentimens, comme on voudra les nommer, n'est donc pas un sentiment simple & uniforme, mais un sentiment mixte.

Nous y avons d'abord distingué une image agréable; & l'on ne sauroit douter que la perception de cette image ne soit un plaisir. Cependant elle peut être agréable de deux façons, ou par elle-même, je veux dire dans le cours ordinaire des choses, ou par l'entremise d'une circonstance accidentelle, qui ne la rend agréable que pour le moment présent.

Dans ce dernier cas, il peut arriver qu'une image déplaisante par elle-même emprunte de l'agrément de la position particuliere où nous nous trouvons. Ainsi, l'image d'un homme qui souffre, image qui nous révolteroit dans toute autre occasion, a des charmes pour nous, lorsque cet homme est notre ennemi. Alors c'est la haine qui fait que nous nous plaisons à cette image affreuse, & nous ne devons ce triste plaisir qu'à l'état violent où notre ame est en proye. Mais, malgré ce plaisir, les Désirs où entrent de pareilles images ne sont certainement pas des biens, & je ne pense pas que personne ose le soutenir. Revenons au Désir en général.

Tant que notre esprit s'arrête à la contemplation de l'objet qui lui plaît, sans se trouver mal à son aise, & sans tendre plus loin, nous ne désirons pas encore, ou nous ne désirons plus; cette contemplation est déjà une jouissance, dans laquelle l'image nous tient lieu de la réalité. Telles sont ces douces rêveries que la Fontaine a si agréablement décrites dans la fable de la Laitiere: telles les extases du poëte, lorsque transporté sur la double colline, il jouit du commerce des Muses & d'Apollon, ou de cet écrivain qui se mire dans ses ouvrages, & se voit

voit faisant les délices de son siecle & de la postérité. Ces visions ne sont point des désirs. La fortune, les honneurs, les biens fantasques dont notre imagination se repaît dans ce délire passager, sont alors pour nous ce qu'étoient les vaisseaux du Pyrée pour ce fou d'Athenes qui se croyoit le propriétaire de ces vaisseaux, & qui les possédoit en effet autant qu'il en avoit besoin pour sa satisfaction.

Gardons-nous bien de mépriser tous les plaisirs de cette nature: ce sont peut-être les plus purs de ceux que la vie humaine nous offre. Nous nous les donnons à peu de frais; nous les goûtons sans remords. Il seroit peut-être heureux de pouvoir se fixer à ces fantômes, & souvent l'ombre vaut mieux que la réalité. Ou plutôt, il n'y a point ici de différence: tous les plaisirs, de quelque source qu'ils nous viennent, sont également réels. Que nous les tenions des sens, de l'imagination, ou de l'entendement, cela n'ajoute ni ne retranche rien à leur existence.

J'ai dit que ces images agréables qui flottent légérement sur la superficie de l'esprit, ne sont pas des désirs. Mais, lorsque l'inquiétude s'y joint, lorsque l'absence des objets représentés par ces images nous donne de l'aversion pour notre situation présente; dès-lors le Désir commence à naître.

Enfin cette inquiétude nous fait faire des efforts pour passer de notre état actuel dans celui où pour le moment nous croyons trouver notre bonheur. Alors le Désir existe. Mais pendant que nos forces & nos facultés tendent ainsi vers le terme du Désir, nous rencontrons des obstacles, & nous éprouvons, à chaque instant, la résistance des milieux qui nous séparent de ce terme.

Si je compte à présent les maux & les biens qu'il y a dans le Désir, j'y découvre, contre une perception agréable, trois sortes de peines, dont la premiere naît de la privation de l'objet désiré, la seconde du dégoût pour ma situation actuelle, la troisieme de la réaction des obstacles qui s'opposent à l'accomplissement du Désir.

Mais

Mais il ne ſuffit pas de compter ces plaiſirs & ces peines; il faut encore les peſer. Or ici il y a une proportion exacte entre les parties conſtituantes du Déſir: & le ſentiment agréable y répond aux ſentimens pénibles dans la même proportion. La grandeur du Déſir ſe meſure conſtamment d'après l'impreſſion plus ou moins forte que la choſe déſirée fait ſur nous. Ainſi, plus nous ſommes agréablement affectés de l'objet qui ſe peint à notre imagination; plus auſſi nous ſentons de peine à en être privés, plus notre état préſent nous eſt à charge, plus nous nous efforçons de parvenir à nos fins, & plus nous ſommes irrités des obſtacles qui nous empêchent de nous ſatisfaire. De tout cela il réſulte que, dans le ſentiment mixte que nous appellons Déſir, la doſe du mal l'emporte ſur celle du bien.

On voit ici que le ſentiment pénible ſe nourrit & ſe fortifie du plaiſir même attaché à l'image de l'objet déſiré, & croît en raiſon de la vivacité de ce plaiſir. Mais ce n'eſt pas tout. Si l'on ſuit, d'un oeil philoſophique, les opérations de l'eſprit humain, on y démêlera aiſément cette loi générale; c'eſt que la ſenſation dominante abſorbe, en grande partie, les autres ſenſations, qu'elle les change, pour ainſi dire, en ſa nature, & en tire un nouveau degré de force pour elle-même. Or la Peine domine dans le Déſir.

Si le Déſir n'étoit pas un mal, l'Eſpérance ſeroit-elle un bien? Elle n'eſt un bien que parce qu'elle adoucit les inquiétudes du Déſir, & ſuſpend nos agitations par des inſtans de relâche & de tranquillité. Dans ces inſtans elle eſt comme une jouiſſance anticipée, elle nous rapproche de l'état de ſimple contemplation, & nous en fait goûter les douceurs. Mais l'inquiétude, toutes les fois qu'elle revient troubler ce repos, ſe groſſit de la joye même que l'Eſpérance avoit ramenée dans nos coeurs, & le Déſir y puiſe de nouveaux alimens. Tout cela arrive en vertu de la Loi dont nous venons de parler. Y a-t-il rien qui irrite d'avantage nos douleurs qu'un eſpoir toujours renaiſſant, & toujours trompé? Cette alternative eſt ſi accablante que les ames les plus fortes ne ſauroient à la longue y tenir; elle finit par changer l'Eſpérance même en Déſeſpoir.

Toutes

Toutes les qualités qui caractérisent le Désir, nous les retrouvons en grand, & avec des traits plus frappans, dans les passions. Ici les images, peintes en couleurs plus vives, excitent des mouvemens plus impétueux. Pour l'homme passionné il n'y a qu'un objet dans la Nature; il ne voit, il ne sent, il n'imagine que celui-là. Comme il tend sans cesse à sortir de la situation qui le gêne, & que par les obstacles contre lesquels il heurte, il est sans cesse retenu dans cette situation, ses vains efforts la lui rendent d'autant plus insupportable. Il en est comme du torrent qui ne peut rompre la digue, & dont les flots repoussés augmentent la fureur. De là cette fermentation du sang, ce cours déréglé des esprits animaux, ce désordre général dont ses yeux, son teint, les traits de son visage, sa physionomie, toute l'attitude de son corps portent des empreintes visibles.

On m'objectera peut-être la passion de l'Amour. Ceux qui la ressentent fortement, ne conviendront point que les Désirs amoureux soient un mal; & loin de souhaiter d'en être affranchis, ils y trouvent, au contraire, leur souveraine félicité. Là dessus j'ai bien des choses à répondre.

Et premierement, remarquez, je vous prie, les contradictions étranges où tombent les esclaves de cette passion. Après avoir attendri de leurs plaintes les bois & les rochers, & fait redire aux Echos l'excès de leur infortune, ils vous soutiendront néanmoins, qu'ils baisent leurs chaînes & bénissent leur martyre; ou ils s'écrieront, avec Pétrarque, que mille plaisirs ne valent pas un tourment *). Que conclure d'un langage aussi extravagant? A le prendre au pied de la lettre, voilà donc des gens qui tout à la fois sont au comble du bonheur, & au comble de la misere.

N'est-il pas plus naturel de conclure que l'Amour est, comme toutes les autres passions, une espece de frénésie? Mais ce n'est point à un frénétique à apprécier l'état où il se trouve: il ne se

*) *Mille piacer non vaglion' un tormento.*

se connoît pas lui-même: tous ses propos trahissent le bouleversement de sa raison. Car que peut-on concevoir de plus absurde qu'un homme qui désire de désirer, & qui seroit au désespoir de ne pas se désespérer?

On demandera peut-être, pourquoi l'Amour produit des symptômes si bizarres? Je réponds, parce que l'Amour est une maladie qui réside dans le Désir même. Il ne s'ensuit point de là que l'état du Désir soit un état heureux; car, quand nous supposerions qu'il fût l'état le plus malheureux, ces symptômes seroient encore les mêmes, & cela par la raison toute simple qu'il est impossible qu'un homme ne désire point dans le tems qu'il désire en effet.

Ecoutez ce même homme dans les intervalles de son paroxysme, & toutes les fois que la raison peut luire à son entendement. Ce ne sera plus le même langage. Il conviendra ingenûment de sa malheureuse condition. Il voudroit pouvoir arracher de son coeur le trait qui le blesse: il forme mille fois le dessein de renoncer à sa passion. Mais aussitôt que le Désir se rallume, il retombe dans son premier délire.

Les Poëtes & les Romanciers font très bien, sans doute, de dépeindre leurs héros amoureux dans tout le désordre de leur esprit, & de faire parler aux fous le langage de la folie. Mais le spéculateur qui calcule nos biens & nos maux dans le silence de son cabinet, ne doit point ériger en maximes de Philosophie des chansons & des ariettes d'Opéra. Ou il sera soupçonné de n'avoir pas lui-même joui de toute la tranquillité d'esprit requise pour les méditations dont il s'occupoit.

Si le Désir nous élevoit au faîte du bonheur, nous serions assurément des êtres fort heureux. Il ne nous resteroit qu'à envier le sort de Tantale, qui goûte ce bonheur sans interruption. Les passions violentes, qui ne sont que de grands désirs, nous mettroient donc fort à notre aise: & la Morale nous donneroit un bien mauvais conseil, lorsqu'elle nous exhorte à les fuir, ou à les dompter.

Mais

Mais enfin, on a beau lutter contre l'évidence, peut-on, sans fermer volontairement les yeux, disconvenir de cette vérité incontestable; c'est que le Désir ne se termine point en lui-même? On ne désire point pour le plaisir qu'il y a à désirer, mais pour le plaisir qu'il y a à jouir. Un homme qui désireroit éternellement, sans parvenir jamais à la jouissance, seroit peut-être la plus infortunée de toutes les créatures; & c'est en quoi, selon plusieurs Théologiens, consistent les supplices de l'Enfer. Or ce seroit tout le contraire, si le Désir étoit un si grand bien, ou si seulement il étoit un bien positif. En ce cas, une suite continuelle de désirs seroit une suite continuelle d'états agréables, & l'Enfer des Théologiens deviendroit un Paradis. Mais n'est-ce pas ici une contradiction dans les termes? Dire que nous sommes heureux en désirant le bonheur, n'est-ce pas dire que nous avons ce que nous n'avons pas?

Le Désir est donc un mal; & la Jouissance est le remede à ce mal. C'est là l'aspect sous lequel Epicure envisageoit la Volupté quand il la définissoit l'exemption de la douleur *). Car, ou je me trompe fort, ou le terme Grec n'est que foiblement rendu par celui d'exemption. Il ne signifie pas simplement la privation, ou l'absence de la douleur, mais encore l'action même qui écarte la douleur, en satisfaisant le Désir. Et l'analogie de la Langue ne s'oppose point à cette interprétation.

Epicure n'ignoroit pas que la volupté en mouvement, cette volupté qui satisfait les besoins de la nature, est un plaisir. Mais convaincu que ce n'est qu'un plaisir de nécessité, entant qu'il guérit le mal du Désir, mal inséparablement attaché à notre fragile constitution, il étoit bien éloigné d'y chercher le bonheur. Cette volupté en mouvement, suivant ses principes, doit nous conduire à la volupté en repos, à cet état tranquille, exempt de désirs & de craintes, en quoi il met le bien suprême, & la derniere fin que le Sage doit se proposer. Il ne nioit donc pas que la satisfaction de nos besoins naturels ne fût accompagnée d'un sen-

 timent

*) τῦ ἀλγῦντος ὑπ'εξαίρεσις.

timent agréable; mais il eût mieux aimé n'avoir point de besoins à satisfaire, & il eût volontiers sacrifié la volupté en mouvement, si sans elle il eût pu parvenir à la volupté en repos. Il n'y a rien en ceci que de très raisonnable: & lorsque les philosophes Cyrénaïques, pour tourner la Volupté d'Epicure en ridicule, l'appellent *le plaisir du dormeur*, ce n'est qu'une fort mauvaise plaisanterie.

La sagesse de cette doctrine d'Epicure paroîtra bien clairement, si l'on prend la peine de nous suivre dans les réflexions philosophiques & morales que nous allons tirer de notre Théorie du Désir.

Nous avons vu que nous achetons le plaisir de la Jouissance par les peines, & les inquiétudes du Désir. Mais ce n'est pas encore ce qu'il y a de plus fâcheux. La plupart du tems nous manquons notre but, nous désirons & nous nous peinons en pure perte. Plus souvent encore nos désirs portent sur de faux biens, ou sur des maux déguisés sous une apparence trompeuse: alors nous serions trop heureux de ne pas voir nos désirs accomplis, & d'en être quitte pour les avoir formés. Enfin, le Désir exagere toujours, & lorsqu'après de longues inquiétudes nous avons atteint le terme de nos souhaits, nous ne trouvons point dans l'objet tant désiré les charmes que notre imagination lui avoit prêtées. De là il arrive qu'après la jouissance, les choses que nous avions le plus ardemment désirées, sont les premieres qui nous lassent, & nous importunent.

Ce n'est donc point un avantage de se trop livrer aux désirs: & c'est mal entendre ses intérêts, c'est être mauvais économe de la vie que d'en contracter une trop grande habitude. Car remarquons bien que ces désirs survivront au pouvoir de les satisfaire, & nous suivront jusque dans l'âge où nos organes émoussés, & nos facultés affoiblies se refusent à leur accomplissement. Alors le mal nous reste, & le remede nous manque. Tâchons donc au moins d'amortir ce feu qui brûle au dedans de nous; puisqu'il est impossible de l'éteindre. Faisons mieux encore. Tournons

nos

nos désirs vers les choses honnêtes, vers les plaisirs de l'esprit, les seuls sur qui la faulx du Tems n'a point de prise.

Quand on considère la nature humaine séparément, & détachée du sage plan dont elle fait partie, on ne peut s'empêcher d'y appercevoir des singularités étonnantes, surtout dans ce mêlange de biens & de maux qui entrent dans la composition de l'homme.

Nous avons prouvé que le Désir est un mal; mais sans ce mal il n'y a presque aucun bien pour nous. Sans lui le Plaisir se réduit à rien, ou à peu de chose. C'est à ce principe même destructeur de notre repos que nous devons la plupart des momens agréables dont nous jouissons.

Il y a plus. Le Désir est un mal; mais la privation totale de désirs seroit encore un plus grand mal. On peut en juger d'après un état qui en approche, & auquel il n'est pas rare que les hommes soient exposés. Je parle de cet état d'anéantissement, de ce vuide où toutes nos facultés paroissent épuisées, où l'ame croupit dans l'inaction, & peut à peine supporter le fardeau de son existence. Il semble que nous soyons faits pour être agités, secoués, traçassés: & si vous promenez vos regards sur le globe de la Terre, vous verrez partout les hommes fidelles à remplir ce but de leur destination.

La vie humaine n'est-elle pas en effet un enchaînement de passions & de désirs? Ne sont-ce pas là les premiers mobiles qui nous font agir, & les grandes machines qui remuent le monde moral? De là vient que tous nos plaisirs s'usent, que jouets éternels de l'instabilité, nous voguons, au gré des vents & des flots, sur la mer orageuse de la vie, & qu'il est si difficile à notre esprit de prendre une assiette fixe. Et cette fluctuation ne paroit-elle pas tenir à notre constitution originaire, au fond même de notre être? Les sentimens agréables & désagréables contribuent également à l'entretenir en nous: notre ame y revient toujours d'elle-même, comme à son état habituel. Un désir n'est pas plutôt éteint, une passion n'est pas plutôt assouvie que de nouveaux désirs, de nouvel-

 les

les passions renaissent. Il en est comme d'une file de ressorts dont les uns ne se débandent que pour tendre les autres. En un mot, il semble que ce soit là cette force vive du monde spirituel qui demeure constamment la même.

Ces considérations paroissent avoir fortement affecté M. de Maupertuis, lorsqu'il médita son *Essai de Philosophie Morale*. Pour prouver que dans la vie ordinaire la somme des maux surpasse celle des biens, il en appelle à la rareté des perceptions dont l'ame chérit la présence, & à cette inquiétude constante dans laquelle nos jours s'écoulent.

Je n'entreprends pas de discuter cette question, elle n'est point de mon sujet. Mais je me permettrai d'observer que la vie heureuse, dont tant de philosophes nous ont bercés, est si peu possible qu'elle répugne à tout ce que nous connoissons jusqu'ici de l'homme.

Si j'avois entre mes mains toutes les qualités qui constituent la nature humaine, & que je pûsse en disposer, comme le potier dispose de la molle argile, je vois clairement que je pourrois les arranger de façon à produire une créature complettement malheureuse, & dont tous les instans fussent marqués par le mal-aise. Mais si l'on me proposoit de tirer de ces mêmes matériaux une vie toute tissue de sentimens agréables, je ne saurois, en vérité, comment m'y prendre.

Vous me demandez des plaisirs. Mais il n'en est point qui à la longue ne vous lasse, & ne vous excede. Il en séroit de même de la chaîne de plaisirs dont il faudroit composer votre vie. D'ailleurs, pour vous faire passer d'un plaisir à l'autre, ne voyez-vous pas qu'il faut que je vous donne des désirs? Il faut donc que je vous rende mécontens de toutes les situations par où vous passez, je dis de chacune à son tour. Il faut donc que je vous donne des aversions. Il faut donc que je vous donne des peines.

En faut-il d'avantage pour mettre dans tout son jour la chimere de la vie heureuse, pour faire évanouir, au flambeau de la Raison, tous ces plans de parfaite félicité qui ne sont que de beaux songes, & pour nous inspi-

inſpirer de la défiance contre ces nouveaux adeptes qui prétendent refondre la nature humaine, & tranſmuer les élémens de la vie. Ils nous promettent des jours filés d'or & de ſoye. Mais, au lieu d'or, ils nous donnent des ſcories & de la fumée.

J'aime à me perſuader que la conjecture par où je vais finir eſt mieux fondée. Lorſque j'embraſſe d'un coup d'oeil cette foule de déſirs qui ſe ſuccédent de ſi près dans notre ame, je ſuis tenté, en les raſſemblant ſous un ſeul point de vue, de conſidérer la vie entiere comme un déſir continu, comme un déſir unique, comme un long déſir. Ne diroit-on pas en effet que nous cherchons, ſans ceſſe, un bien inconnu, & dont nous n'avons qu'une idée confuſe ? Pour le trouver, on erre d'objets en objets ; on goûte de tout, on ſe dégoûte de tout, tandis que le but où nous tendons fuit devant nous, & ſe perd dans un lointain obſcur. Ne ſeroit-ce pas que nous ſentirions, à chaque inſtant, que nous ne ſommes pas encore ce que nous devons être, que notre exiſtence n'eſt qu'ébauchée, & qu'il nous manque je ne ſais quoi pour la completter ?



MÉMOI-

MÉMOIRES
DE
L'ACADÉMIE ROYALE
DES
SCIENCES
ET
BELLES-LETTRES.

CLASSE DE BELLES-LETTRES.

* * *

PREMIERE
DISSERTATION
SUR
L'ANCIENNE ISLE DE TARSCIS,
CONTENANT LA DÉCOUVERTE DE CETTE ISLE,
PAR M. DE FRANCHEVILLE.

L'Isle de Tarscis qui sera le sujet de cette Lecture, n'ayant été connue jusqu'ici que dans l'Ecriture sainte, a exercé depuis plusieurs siecles un grand nombre de Savans qui se sont intéressés à sa découverte. Leurs opinions néanmoins peuvent être réduites à neuf.

La premiere est celle qui place avec assez de vraisemblance *Tarscis* à Tarse capitale de la Cilicie. Cette opinion est soutenue par Anselme & Nicolas de Lyra deux Docteurs d'une grande érudition.

La seconde est celle qui prétend que *Tarscis* est l'Asie Mineure ou la Natolie. C'est l'opinion de plusieurs Savans, entr'autres du célebre Jesuite, François de Ribera, dans son Traité du Temple de Salomon.

La troisieme est celle qui prend *Tarscis* en général pour l'Espagne Bétique, & en particulier pour l'Isle Tartessus aujourdhui Cadix, située dans le détroit de Gibraltar. C'est le sentiment de Pineda, de Goropius & de quantité d'autres, mais qui a été surtout accrédité par Samuel Bochart si connu par la profonde étude qu'il avoit faite des Langues & de l'Histoire.

La quatrieme est celle qui veut que *Tarscis* soit Carthage. Ceux qui la soutiennent ont à leur tête le très-docte François Vatable.

La cinquieme est celle qui croit trouver du rapport entre *Tarscis* & Angola sur la Côte Occidentale d'Afrique. C'est la conjecture d'Emanus & de quelques autres.

La sixieme est celle qui relegue *Tarscis* aux Indes Orientales. Le Jesuite Joseph Acosta passe pour le chef de cette opinion. Mais avant lui Antoine du Pinet dans sa vieille Traduction de l'Histoire Naturelle de Pline Liv. VI. chap. XX. avoit placé *Tarscis*, qu'il appelle le Royaume de *Tarse*, dans celui de *Guzurate*, qu'on nomme plus communément le Royaume de Cambaye, & qui est une Province de l'Empire du Grand Mogol.

La septieme est celle qui va chercher *Tarscis* en Amérique, & dans le Pérou même, en s'y rendant par la mer pacifique. C'est une idée assez vulgaire, suivant le Moreri qui ne la croit pas même destituée de vraisemblance.

La huitieme est celle qui considere *Tarscis* comme un nom général employé par les Hébreux pour désigner toutes sortes de pays éloignés, au delà de la mer. Cette opinion est assez fameuse, puisqu'elle a pour auteur S. Jérôme.

La neuvieme enfin est celle qui, dans l'incertitude de savoir où placer Tarscis, la prend pour tout l'Ocean. C'est ce que suppose Martin Lippenius dans le Traité qu'il a publié en 1661 sur la navigation des vaisseaux de Salomon à Ophir.

Tels sont les divers sentimens qui ont jusqu'ici partagé les Savans sur cette matiere autant que j'en ai connoissance. Mais il n'y en a pas un seul, j'ose le dire, qui puisse soutenir une critique raisonnable. C'est de quoi l'on jugera par la suite. Ainsi regardant la question comme encore actuellement indécise; je me propose à mon tour de chercher cette terre de *Tarscis*, depuis si longtems inconnue; plus excité dans cette recherche par l'exemple de tant de grands hommes qui

qui l'ont jugée digne de leur attention, que rebuté du peu de succès de leurs efforts.

Il est marqué au Chap. X. de la Genese suivant l'Hébreu, dont je préférerai par-tout les versions à celles du Grec des Septante; il y est marqué, dis-je, que „les Enfans de Javan fils de Japhet sont „Elisça, *Tarscis*, Kittim & Dodanim; & que c'est de ceux-là que „sont descendus les Peuples qui partagerent entr'eux les Isles des „Nations.“

Je m'étonne que les Savans qui ont parcouru l'ancien & le nouveau Monde pour aller à la découverte de *Tarscis*, n'ayent pas fait attention à ce Passage qui leur épargnoit une si longue navigation. Pour moi j'y trouve l'origine de cette Terre inconnue, qui doit être une Isle, & une Isle ainsi nommée parce qu'elle fut peuplée par des descendans de *Tarscis* fils de Javan.

J'y trouve encore que Javan pere de *Tarscis*, ayant été fils de Japhet, l'Isle à laquelle ses premiers habitans donnerent le nom de *Tarscis*, ne peut être située qu'en Europe, qu'on sait avoir été peuplée par la famille de Japhet. Dès-là on voit combien sont peu fondés ceux qui ont été chercher cette Isle en Afrique, dans les Indes, & jusque dans l'Amérique au Perou.

Mais il y a plus: l'Isle de Tarscis n'étoit pas seulement en Europe, elle étoit en même tems dépendante de la Grece. Car Javan pere de *Tarscis* est reconnu sans difficulté pour l'auteur & la tige de tous les Grecs. De là vient que l'Ionie s'appelle en Hebreu Javan; & que „dans le chap. VIII. des Prophéties de Daniel, Alexandre le Grand „est désigné par le titre de Javan,“ à cause qu'il fut le chef & comme le Roi de toute la Grece au moyen du commandement général des Troupes Grecques qu'il se fit donner par les Députés des Villes assemblés à Corinthe après la mort de son pere, comme le rapportent Trogue Pompée dans Justin Liv. XI. chap. II. & Diodore de Sicile Liv. XVII. pag. 489. de l'édit. de Rhodoman.

Continuons de suivre le fil de notre recherche. J'ai dit que l'Isle de *Tarscis* étoit en Europe & dépendante de la Grece. J'ajoute qu'en conséquence elle devoit être voisine de la terre de Kittim, parce que cette terre fut peuplée par les descendans d'un frere de *Tarscis*. Aussi voit-on dans l'Ecriture les terres de *Tarscis* & de Kittim nommées ensemble & même substituées l'une à l'autre à raison de leur voisinage, comme dans ces endroits d'Isaïe chap. XXIII. „Hurlez, ô navires de Tarscis car elle n'est plus . . . ceci leur a été découvert du „pays de Kittim . . . *Habitans de Tyr* passez en *Tarscis* . . . Vierge „fille de Sidon leve-toi, traverse en Kittim.“ Or cette terre de Kittim étoit la Macédoine, puisqu'„Alexandre le Grand allant faire la „guerre à Darius Roi de Perse, partit du pays de Kittim suivant le „chap. I du I Livre des Maccabées; & que Philippe & Persée les der„niers de ses successeurs sont appellés tous deux Rois de Kittim au „chap. VIII. de ce même Livre.“ Voilà donc l'Isle de *Tarscis* non seulement dépendante de la Grece, mais dans la proximité de la Macedoine.

Si la Macedoine étoit Kittim, & Kittim voisine de *Tarscis*, les deux autres fils de Javan devoient pareillement avoir peuplé d'autres parties de la Grece. En effet les noms de ses deux fils, Elisça & Dodanim, se reconnoissent, l'un dans les Eliséens ou Elidiens qui occupoient la partie la plus méridionale de la Grece, connue autrefois sous le nom d'Elide, ensuite appellée le Peloponnese & aujourdhui la Morée: l'autre dans les Dodaniens ou Dodoniens, fameux par leur Oracle de Dodone qui prit naissance des honneurs divins qu'ils rendirent à leur fondateur Dodanim après sa mort. Ils furent depuis nommés Epirotes, & ils avoient eu pour leur partage la partie la plus occidentale de la Grece.

Poursuivant ces inductions, je dis à présent que *Tarscis*, étant une Isle au voisinage de la Macédoine, ne pouvoit être que dans la Mer Egée. Mais en ce cas elle devoit avoir elle-même dans son voisinage plusieurs autres Isles qui formoient ce qu'on nomme aujourdhui l'Archipel. Et n'est-ce pas ce que le Passage de la Genese fait entendre

dre

dre en disant que „les descendans de Tarscis & de ses freres partagé-
„rent entr'eux les Isles?" N'est-ce pas aussi ce qu'Isaïe paroît dé-
signer dans ce Passage du chap. XXIII. Hurlez, ô navires de *Tarscis* ...
„Hurlez, vous qui habitez dans les Isles." Aussi bien qu'en cet en-
droit du chap. LX. „Les Isles s'attendront à moi & les navires de
„*Tarscis* les premiers pour amener tes fils avec leur argent, &c." Et
David encore, lorsque prévoyant la gloire de son fils Salomon, il dit
dans le Pseaume LXXII. „Les Rois de *Tarscis* & des Isles lui présen-
„teront des dons." Termes qui marquent tout à la fois que *Tarscis*
n'étoit pas seulement voisine d'autres Isles, mais qu'elle en étoit en-
core la plus renommée & la principale.

Si *Tarscis* étoit, comme on vient de le voir, l'Isle la plus célé-
bre & en quelque maniere la capitale de l'Archipel; se trouvant dans
la mer méditerranée de même que Tyr, elle n'a pu manquer d'avoir de
grandes liaisons avec cette ville la plus fameuse de l'antiquité par l'é-
tendue de son commerce, par ses richesses & par la puissance de sa
marine. C'est aussi pourquoi au X. chap. du I. Livre des Rois & au
IX. du II. des Chroniques, „la Flotte de *Tarscis* navige pour Salomon
„de concert avec la Flotte d'Hiram Roi de Tyr." Pour la même rai-
son au XXIII chap. d'Isaïe „la destruction de Tyr prédite par ce Pro-
„phete est annoncée particulierement aux navigateurs de *Tarscis*,
„comme un événement qui les intéressoit autant que les Tyriens mê-
„mes, sans doute à cause des facteurs & des magasins qu'ils avoient
„dans cette ville." Les expressions du Prophete sont énergiques,
„Hurlez, ô navires de *Tarscis*, car elle n'est plus. Hurlez, navi-
„res de *Tarscis*, car votre force est détruite." Enfin c'est encore ce
qui fait dire à Ezechiel chap. XXVII. parlant à la même ville de Tyr:
„Ceux de *Tarscis* ont trafiqué avec toi de toutes sortes de richesses,
„faisant valoir tes foires par leur argent, leur fer, leur étain & leur
„plomb. Les navires de *Tarscis* t'ont célébrée dans leurs chansons à
„cause de ton commerce." Non seulement ces Passages donnent l'i-
dée d'une étroite liaison, d'une grande correspondance entre *Tarscis*
& Tyr, mais aussi d'une communication facile, en un mot d'une naviga-
tion

tion de proche en proche, telle qu'elle devoit être d'une Isle de l'Archipel aux côtes de la Phénicie. Et ne faut-il pas s'aveugler de propos délibéré pour vouloir, après des passages si clairs, chercher *Tarscis* non seulement en Espagne & à Carthage, mais plus ridiculement encore à Angola, aux Indes, au Pérou, ou même prendre *Tarscis* pour toutes sortes de pays éloignés, & pour tout l'Océan?

Mais en m'accordant que *Tarscis* fut dans la même mer que Tyr, ne se pourroit il pas après tout qu'elle eût été, ou Carthage Colonie Tyrienne, ou l'Espagne peuplée du moins par des descendans de Japhet, ou même l'Asie mineure, & en particulier Tarse capitale de la Cilicie; toutes terres voisines de la méditerranée & par conséquent à portée de commercer avec Tyr?

Voici ma réponse à cette demande. Pour commencer par Carthage, je ne croi pas qu'on trouve beaucoup de rapport de son nom à celui de *Tarscis*. Mais, quand on voudroit y en trouver, Carthage n'ayant été une colonie Tyrienne que du tems de Didon sœur de Pigmalion qui bâtit cette ville 882 ans avant l'Ere Chrêtienne, il est impossible qu'elle ait été *Tarscis* qui existoit dans la plus grande splendeur du tems de Salomon, 140 ans tout au moins avant Didon, & même dès le tems de David qui parle dans un de ses Pseaumes (le XLVIII.) des navires de *Tarscis* brisés par le vent d'Orient, & dans un autre (le LXXII.) des Rois de *Tarscis* & des Isles. D'ailleurs ni Carthage, ni l'Espagne, ni l'Asie mineure ne peuvent point avoir été *Tarscis*, parce qu'elles sont toutes trop éloignées de la terre de Kittim, c'est à dire de la Macédoine, pourqu'on puisse trouver entr'elles la connexion de voisinage qui étoit entre Kittim & *Tarscis*. A l'égard de Tarse il est vrai que son nom est capable d'en imposer d'abord, & qu'en effet cette ville fut ainsi appellée parce que la famille de *Tarscis* la bâtit en venant premierement occuper la Cilicie. Mais, quand on supposeroit, à cause de cette ressemblance de nom, qu'il y auroit dans l'Ecriture un passage qui, quoique parlant de *Tarscis*, dût être entendu manifestement de cette ville de Tarse: c'est au second chapitre du Livre de

Judith

Judith où il est dit, suivant les versions faites sur le Grec des Septante, „qu'Holoferne étant sorti d'Assyrie, & venu en Cilicie, pilla les Peu„ples de *Tarscis.*" Quand, dis-je, on feroit cette supposition, & que ce mot de *Tarscis* se trouveroit dans les versions faites sur l'Hebreu, ce qui n'est point; il n'en seroit pas moins vrai que cette ville de Tarse n'auroit point été *Tarscis*, tant parce qu'elle est aussi éloignée que l'Asie Mineure de la Macédoine & de la Grece, qu'à cause de ce qu'on lit dans le Livre de Jonas; „que ce Prophete ne voulant point „aller à Ninive, comme Dieu le lui ordonnoit, se leva pour s'enfuir à „*Tarscis;* qu'il descendit à Japho; qu'il trouva là un navire allant à „*Tarscis;* & qu'après avoir payé son transport, il y entra pour aller „avec eux à *Tarscis;* mais qu'il s'éleva un grand vent sur la mer, &c." Car, si l'on suppose que *Tarscis* étoit Tarse, le Prophete eût fait précisément tout le contraire de ce qu'il avoit dessein de faire, puisque venant de Japho le chemin de Tarse le conduisoit à Ninive & l'en rapprochoit: au lieu qu'allant de Japho à l'Isle de *Tarscis* que je présume avoir été dans l'Archipel, il suivoit tout à fait ses vues, en s'éloignant manifestement de Ninive & y tournant le dos. D'ailleurs cette navigation est en effet plus raisonnable à son égard, que ne seroit celle qu'on lui feroit faire sans nécessité en Espagne, à Carthage, à Angola, aux Indes Orientales, au Pérou, en toutes sortes de pays d'outre mer, ou par tout l'Océan, en adoptant quelqu'une des opinions qui placent *Tarscis* dans ces espaces imaginaires.

Enfin, pour achever de parvenir à l'heureuse découverte de cette Isle si desirée, rappellant ce que j'ai dit plus haut, que Javan pere de Tarscis a été la tige de tous les Grecs, ce seroit ici le lieu de faire voir comment lui ou ses descendans, après avoir quitté l'Arménie, ayant peuplé ensuite l'Ionie & les autres Provinces de l'Asie Mineure, entr'autres la Cilicie, & fondé la ville de Tarse sa capitale, s'étendirent de-là vers l'Occident, passerent le Bosphore de Thrace, gagnerent la Romanie, occuperent tout le continent que l'on a depuis appellé la Grece, & ne s'y bornant pas même, se répandirent dans toutes les Isles de l'Archipel, donnant sans doute à la premiere Isle qu'ils peuple-

rent & qui devoit être l'une des plus proches de la côte, le nom de *Tarscis* en mémoire du chef de la colonie. Mais, comme tout cela demanderoit des discussions épineuses & d'un trop long détail, il suffit de jetter les yeux sur une Carte de la Méditerranée pour y voir à la tête de l'Archipel, vis à vis de la Romanie anciennement la Thrace, une Isle appellée TASSO qui est separée du continent par un canal de quatre milles d'Italie qui n'en font qu'un d'Allemagne. Or je ne saurois douter que cette Isle de *Tasso*, vû sa situation au voisinage de la Macédoine & de la Grece, ne soit l'Isle de *Tarscis* dont on est depuis si longtems en peine. Il est même assez remarquable que les tems & les diverses successions des Peuples qui depuis tant de siecles ont dû rendre méconnoissables des noms aussi anciens, ont si peu changé celui de cette Isle, que malgré l'altération on y reconnoît encore le nom de *Tarscis*, ou du moins celui des *Tassiens* ou *Tasiens* ses premiers habitans, que les Abbés Banier & Lenglet, (le premier au Tome III. de sa Mythologie, & l'autre dans un Discours préliminaire qu'il a mis à la tête de ses Tablettes Chronologiques de l'Histoire universelle) disent avoir été „les descendans de *Tarscis*, & après avoir „occupé les Isles s'être répandus en Macédoine & sur les côtes de „l'Isle d'Eubée, aujourdhui Negrepont." Sur quoi je ne puis assez m'étonner que ces deux Savans étant ainsi sur le chemin de la *Tarscis* de l'Ecriture, ni l'un ni l'autre n'en ayent pas eu seulement le moindre soupçon. Ils ne disent rien de cette Isle de *Tasse*, & s'ils la connoissoient, on peut assurer que ni eux ni d'autres n'ont jamais songé à y chercher l'Isle de *Tarscis*.

Je suis donc parvenu à trouver cette Isle dans l'Isle de *Tasso*, fondant ma découverte sur la situation de cette Isle, sur l'origine de ses premiers habitans descendus de *Tarscis*, & sur l'analogie de son nom. Ces trois caracteres paroissent suffisans. „Mais, me dira-t-on, „peut-être que cette Isle de *Tasso* n'avoit rien d'ailleurs qui fût propre „à justifier la réputation de l'ancienne *Tarscis*; Que ce n'étoit qu'une „Isle pauvre, habitée par de misérables Pêcheurs, ou qui produisît „tout au plus du sel comme l'Isle de Tartessus dans laquelle on a pré-

„ten-

„tendu placer *Tarscis*; en un mot il se pourroit qu'elle n'eût eu que „peu ou point de célébrité, comme le fait présumer non seulement le „silence des Abbés Banier & Lenglet, mais celui de quelques Géogra-„phes estimés, tels que Philippe Cluvier, Jean Bunon son commenta-„teur, Jean Hubner, & plusieurs autres qui n'en font aucune men-„tion." Je sens toute l'attention que mérite ce doute, & pour tâcher de le lever je vai rapporter ici ce qu'en ont écrit un petit nombre d'anciens & de modernes que j'ai été à portée de consulter, laissant à d'autres le soin d'en augmenter la collection, pour completer, si l'on veut, l'histoire de cette Isle de *Tasso*.

Hérodote en parle, au second Livre de son Histoire, sous le nom de l'Isle de *Thasis*. Il dit „que c'est une Isle de la mer Egée aux „environs de la Thrace & vis à vis l'embouchure du fleuve Nessus, „ayant une ville du même nom qui fut bâtie par les Phéniciens, les-„quels parcourant toute l'Europe par terre & par mer vinrent jusqu'à „cette Isle. Il ajoute qu'elle avoit anciennement une montagne riche „en métaux qui à force d'être creusée & fouillée fut renversée de fond „en comble."

Virgile a connu l'Isle de *Thasus*, ou du moins l'excellente qualité de ses vins blancs qu'il célebre au second Livre des Georgiques: *sunt Thasiæ vites, sunt & Mareotides albæ.*

Diodore de Sicile en fait mention sous le nom de l'Isle de *Thasos*, dans plusieurs endroits de ce qui nous reste de son Histoire universelle. Voici ce qu'il en dit. „La premiere année de la 79 Olym-„piade (qui répond à la 464. avant l'Ere Chrétienne) les Athéniens ra-„menerent à leur obéissance ceux de *Thasos* qui s'étoient révoltés con-„tre eux à l'occasion de leurs Mines (*Liv. XI. p.* 53. *de Rhodoman*). „Quarante ans après (l'an 424) pendant la guerre du Péloponnese „Brasides Général des Lacédémoniens dans la Thrace prit Amphipo-„lis & plusieurs villes des environs, dont les principales furent Syme „& Galepse, deux colonies sorties de l'Isle de *Thasos* (*Liv. XII. p.* 118). „Seize ans après (l'an 408) Thrasybule Général des Athéniens condui-

 „sit

„fit à l'Isle de *Thasos* quinze vaisseaux avec lesquels il réduisit les ci„toyens de la ville, & leur tua 200 hommes. Les ayant ensuite me„nacés d'un siége en forme, il les obligea de reprendre leurs bannis „qui favorisoient Athenes, & ayant laissé là une garnison Athénienne „il en fit des alliés de sa République (*Liv. XIII. p.* 194). Quarante„huit ans après (l'an 360) les habitans de *Thasos* s'établirent les uns „après les autres dans un lieu qu'on appelloit Crines. Philippe Roi „de Macédoine prit cette habitation nouvelle sous sa protection „(*Liv. XVI. p.* 408). Deux ans après (l'an 358) Philippe étant passé „à Crines, il y augmenta le nombre des citoyens & la nomma Philippes „de son nom. Il fit travailler aux environs à des mines d'or qui avant „lui étoient ou inconnues ou négligées, & il les amena par ses soins „jusqu'à lui rapporter annuellement la valeur de plus de mille talens. „S'étant fait par ce moyen en très-peu de tems un trésor considérable, „il éleva bientôt le Royaume de Macédoine à un très-haut point de „gloire & de puissance. Ce fut dès lors qu'il fit battre une monnoye „d'or qui portoit son nom. (*Ibid. p.* 413.)" Voilà ce qu'on trouve dans Diodore tout défectueux qu'il est. Que de choses curieuses sur cette même Isle de *Thasos* n'y trouveroit-on pas encore, si des 40 Livres de son histoire il n'y en avoit malheureusement 25 de perdus.

Strabon contemporain de Diodore „a cru que les Insulaires de „Paros avoient bâti *Thasos* (*Liv. X. p.* 332. *de la Traduct. de Conrad* „*Heresbach*)." C'est tout ce que j'ai trouvé au sujet de cette Isle dans les XVII Liv. de sa Géographie, & j'avoue que j'en suis étonné: Car je compte pour rien la citation qu'il fait au même Liv. p. 322. d'un *Stesimbrotus Thasius*; au Liv. XVI. p. 505. d'*Antisthenes* ou plutôt d'*Androsthenes Thasius*, qu'Alexandre le Grand envoya avec Néarque pour reconnoître les côtes d'Arabie, de quoi il avoit fait une relation qui n'est point venue jusqu'à nous; & au Liv. XVII. p. 519. d'un ancien Physicien appellé *Thrasyalcus Thasius*; surnom qu'ils portoient tous trois parce qu'ils étoient *Thasiens*, c'est à dire de l'Isle de *Thasos*.

Pline l'Ancien va nous dédommager de la stérilité de Strabon, au sujet de cette Isle qu'il nomme diversement dans son Histoire Natu-

relle

ne*, *Thassus*, *Thasus*, *Thasos*, *Taxus*, & ses habitans *Thasiens*. Voici ce qu'il en dit. „L'Isle de *Thassus* est à cinq milles de l'Isle de „Stalimene. Elle n'est sujette à personne, & on l'appelloit anciennement Aëria ou Æthria. De *Thassus* au Port d'Abdere qui est en „Thrace on compte 20 milles *), 62 jusqu'au mont Athos & autant „jusqu'à l'Isle de Samothrace (*Liv. IV. Ch. XII.*). Par de là l'Albanie & „l'Ibérie, on entre dans la contrée des *Thasiens* & Triariens, qui s'étend jusqu'au mont Pariedrus (dans la grande Arménie) & après laquelle on entre dans les deserts & les montagnes de la Colchide „(*Liv. VI. Ch. X.*).“ Il paroit par ce passage que la famille de *Tarscis* en quittant l'Arménie y avoit laissé une colonie avant que de venir dans l'Asie mineure. „*Thassus* est dans le cinquieme Parallele de même „que la Macédoine. Sous ce climat le Gnomon ou l'aiguille de sept „pieds rend six pieds d'ombre le jour de l'Equinoxe à midi. Le plus „long jour y est de quinze heures (*même Liv. Ch. XXXIV.*). C'est „aux Thasiens qu'est due l'invention des vaisseaux de mer longs & „couverts (*Liv. VII. Ch. LVI.*). Outre les meilleurs raisins de notre „Italie, les autres dont on fait cas, ont été apportés de l'Isle de Chio „& de *Thasus* (*Liv. XIV. Ch. II.*). On a toujours eu en grande estime les vins de *Thasos* & de Chio (*Même Liv. Ch. VII.*). La vigne „ayant la vertu d'attirer le goût des plantes qui en sont voisines, les „*Thasiens* par cette raison, pour avoir un vin médecinal auquel ils donnent le nom de Phthorium, plantent au pied des vignes, du Concombre sauvage, de l'Ellebore & de la Scammonée (*Mêm. Liv. Ch. XVI.*). „En fait d'Avelines, espece d'Amande, on n'estime que les *Thasiennes* „& celles d'Alba-longa (*Liv. XV. Ch. XXII.*). Tous les anciens „chef-d'oeuvres de marbre font faits de marbre de *Taxus* qui est une „des Isles de la mer Egée, ou de celui de l'Isle de Mitylene; mais ce „dernier est un peu plus brun que l'autre (*Liv. XXXVI. Ch. VI.*). „C'est avec raison qu'Antoine du Pinet dans ce dernier passage traduit „*Taxus* par l'Isle de Tasso.

 Dans

*) Ces milles sont des milles d'Italie qu'il faut réduire au quart pour en faire des milles d'Allemagne.

Dans les nombreux Traités de Plutarque je n'ai rencontré que deux fois le nom de l'Isle de *Thasos*, car je ne compte pas les endroits où il cite quelqu'auteur *Thasien*, tel par exemple que le Stesimbrotus *Thasius* de Strabon dont il parle comme d'un Historien à peu près contemporain de Cimon. Mais dans la vie de ce Général Athénien, racontant son expédition contre l'Isle de *Thasos*, il dit: „Après „avoir domté les Thraces, & assujetti aux Athéniens toute la Cherso„nese, Cimon vainquit dans un combat naval les *Thasiens* qui avoient „secoué le joug d'Athénes, & leur ayant pris 33 vaisseaux, il devint „maître de leur ville, s'empara des mines d'or qu'ils possédoient dans „le continent opposé, pour les donner à sa République, & enleva ce „territoire aux *Thasiens* (*Tom. I. des vies de Plutarq. p.* 165 *&* 175. „*de Xilander in* 8°.)." Il faut bien remarquer que les Mines d'or dont il vient d'être parlé, n'étoient point dans l'Isle de *Thasos*, mais vis à vis de l'Isle dans la terre ferme. L'autre passage se rapporte au tems où l'Isle de *Thasos*, délivrée du joug des Athéniens, étoit devenue Province Romaine, & c'étoit ce tems même où vivoit Plutarque, surquoi il dit: „Mais un *Thasien* non content de primer entre ses conci„toyens par les honneurs & l'autorité dont il est revêtu, s'afflige de ne „point porter la robe Patricienne; & s'il la porte, de n'être pas un „Préteur Romain; & s'il est Préteur, de n'être point Consul; & s'il „est Consul, de n'avoir été nommé que le second & non pas le pre„mier (*Traité de la Tranquil. de l'ame au Tom. II. des moralités de Plu*„*tarq. p.* 257. *de Xiland.*)." Cela prouve qu'au tems dont il s'agit les *Thasiens* étoient admis aux dignités du Sénat Romain. Mais il en étoit de même d'un habitant de Chio, d'un Galate & d'un Bithynien, comme Plutarque le dit au même endroit.

Polyœnus a fait aussi mention de l'Isle de *Thasos* aux Liv. II. & VIII. de son Traité intitulé les Stratagêmes. C'est à l'occasion de la guerre que Cimon fit aux *Thasiens*, & il remarque „que ces Insulaires „soutinrent leur révolte contre les Athéniens avec un acharnement „dont on a peu d'exemples. Comme s'ils avoient affaire à des enne„mis cruels & barbares dont ils eussent eu à craindre les dernieres ex-

„tré-

„trémités, ils décernerent peine de mort contre le premier qui propo-„feroit de fe rendre aux Athéniens. Le fiége dura trois ans, & fit „fouffrir à ces malheureux citoyens tous les maux les plus cruels de la „guerre, fans pouvoir vaincre leur opiniâtreté. Les femmes fecon-„derent leurs efforts avec la même ardeur; & comme on manquoit „de cordages pour faire agir les machines, elles donnerent toutes „de bon cœur leurs chevelûres pour être employées à cet ufage. La „famine étant devenue extrême dans la ville, il mouroit tous les jours „un grand nombre d'habitans. Un généreux *Thafien* nommé Hégé-„toride, qui voyoit avec douleur périr fes concitoyens, entreprit de „les fauver au péril de fa vie. S'étant mis la corde au cou, il vint fe „préfenter à l'Affemblée & demanda qu'on le fit mourir fi on le ju-„geoit à propos; mais qu'on fauvât le refte du Peuple par fa mort, „en aboliffant la loi meurtriere qu'ils avoient publiée contre leur pro-„pre intérêt. Les *Thafiens* touchés de fa grandeur d'ame, abolirent „la loi & n'eurent garde de le faire mourir. Ils fe rendirent à Cimon „qui leur laiffa la vie fauve, fe contenta de démanteler leur ville, & fe „faifit de leurs mines d'or qui étoient fur la côte de la Thrace oppofée „à l'Isle."

Paufanias eft le dernier des anciens dont je me fuis propofé de parler. Son Voyage de la Grece eft l'ouvrage d'un favant & d'un homme de goût, très-croyable lorfqu'il raconte ce qu'il a vu, mais comme tous les voyageurs fujet à mentir lorfqu'il parle d'après autrui, & qu'il rapporte furtout des traditions antérieures à fon tems. C'eft ce qui lui fait dire dans un endroit de cet Ouvrage (Liv. VI. p. 12. de l'Edit. indiquée cy après). „Je fuis obligé de rapporter ce „que l'on dit; mais je ne fuis pas toujours obligé de le croire." Voi-ci ce qu'on y trouve au fujet de l'Isle de *Thafos* que fon Traducteur l'Abbé Gédoyn appelle *Thafe*. „Vous voyez, dit-il, dans ce temple „(il parle de Jupiter Olympien) deux Statues de l'Empereur Hadrien „faites de marbre de *Thafe* (*Liv. I. Voyage de l'Attique*, *Tom. I. p.* 87. „*de Gedoyn in* 8°.). Ceux de *Thafe* ont auffi fait don d'un Hercule de „bronze avec fon piédeftal. Ces Peuples font originairement Phéni-„ciens;

„tiens; car sortis de Tyr & des autres endroits de la Phénicie, ils „s'embarquerent avec *Thasus* fils d'Agénor pour aller chercher Euro„pe. L'Hercule qu'ils ont dédié à Jupiter Olympien est haut de dix „coudées: il tient de la main droite une massue & de la gauche un arc „(*Liv. V. Voyage de l'Elide Tom. II. p.* 351.): . . . J'ai oui dire à *Thase*.“ En cet endroit le Traducteur fait une Note pour dire que „Pausanias „avoit voyagé en Phénicie comme il le fait entendre ici.“ Mais il se trompe, car l'auteur y fait entendre qu'il avoit voyagé en l'Isle de *Thasos* qui n'étoit pas dans la Phénicie, mais dans la mer Egée. „J'ai „oui dire à *Thase* que du commencement l'Hercule qu'ils honoroient „étoit Hercule de Tyr; mais que dans la suite ayant eu commerce „avec les Grecs, ils avoient aussi honoré leur Hercule fils d'Amphi„tryon (*Ibid. p.* 352.). Parmi ceux à qui l'on a érigé des Statuës dans „le bois sacré d'Olympie, vous voyez Tellon de *Thase* vainqueur au „combat du ceste dans la classe des enfans: on ne sait de qui est sa sta„tue. Plus loin vous en trouverez quatre que les Eléens ont érigées „à Philippe Roi de Macédoine, à son fils Alexandre, à Seleucus & à „Antigonus. Non loin de ces Rois est Théagene de *Thase* fils de „Timosthene. Mais ceux de *Thase* lui donnent une autre naissance; „ils disent que Timosthene étoit Prêtre d'Hercule dans leur ville, & „que sa femme ayant eu commerce avec le fantôme d'Hercule qui „avoit pris la ressemblance de Timosthene, il en nâquit Théagene, „qui à l'âge de neuf ans comme il revenoit de l'école & qu'il passoit „par la place publique, prit tant de goût pour une statue de bronze „qui y étoit, qu'il la mit sur son épaule & l'emporta chez lui: c'é„toit la statue d'une divinité. Le peuple irrité de ce vol vouloit mas„sacrer le jeune Théagene. Un grave citoyen dissipa cette multitude, „empêcha qu'on ne maltraitât le jeune enfant & lui ordonna seulement „de rapporter la statue. Théagene la rapporta & la remit en sa pla„ce. Aussitôt la renommée publia dans toute la Grece la force pro„digieuse de cet enfant. J'ai raconté une partie de ses victoires aux „Jeux Olympiques . . . En un mot il compta jusqu'à quatorze cent „couronnes qu'il avoit eues dans les divers Jeux de la Grece. Après „sa

„sa mort un de ses ennemis s'étant approché la nuit de sa statue la „fustigea par vengeance, comme si Théagene en bronze eût pu sentir cet affront. La statue étant tombée tout à coup sur cet insensé, „ses fils la citérent en justice comme coupable de la mort d'un homme, „& le Peuple de *Thase* la condamna à être jettée dans la mer, suivant „l'intention de Dracon qui, dans les loix qu'il a données aux Athéniens „sur le meurtre, veut que l'on extermine jusqu'aux choses inanimées „qui, soit en tombant, soit par quelque autre accident, ont causé la „mort d'un homme. Quelque tems après, ceux de *Thase* souffrant „d'une grande famine envoyerent consulter l'oracle de Delphes: il leur „fut répondu qu'ils devoient rappeller leurs bannis. Ils obéirent, „mais fort surpris de voir la stérilité continuer, ils retournerent à l'o„racle, dont la réponse fut qu'ils avoient oublié Théagene. Alors ils „furent bien embarrassés, ne sachant comment s'y prendre pour re„couvrer sa statue. Heureusement des pêcheurs la retrouverent en „jettant leurs filets dans la mer. On la remit en sa place, & dès ce „moment le peuple de *Thase* rendit les honneurs divins à Théagene. „Plusieurs autres villes soit Grecques soit Barbares en firent autant. On „regarda Théagene comme une divinité secourable, & les malades lui „adresserent leurs vœux. Sa statue est donc aujourdhui dans l'Altis; & „c'est un Ouvrage de Glaucias d'Egine (*Liv. VI. Voyag. de l'Elide* „*Tom. III. p.* 39. *& suiv.*)."

Je ne doute point que d'autres après moi qui voudront épuiser la matiere, ne trouvent encore chez les anciens beaucoup de remarques à faire sur cette Isle de *Thasos*, de *Thasus* ou de *Thassus*. Macrobe, par exemple, leur apprendra dans ses Saturnales Liv. III. Ch. XVIII. sur le témoignage de Cloatius ancien auteur Grec, que „la „noix *Thasienne* est la même que la noix Grecque, qui est le fruit de „l'amandier." Pour moi je n'ai pas prétendu donner ici l'histoire de cette Isle, ni à beaucoup près compiler scrupuleusement tout ce qui en a été écrit. Mais ce que j'ai dit, est plus que suffisant pour les conclusions que j'ai dessein d'en tirer. Encore ne voudrois-je pas assûrer que les différens témoignages dont j'ai donné l'extrait, soient exemts de

toute erreur. Car, par exemple, quelle apparence y a-t-il que l'Isle dont il s'agit, tirant son nom de *Tarscis* chef de ses premiers habitans, ait eu pour fondateurs, suivant Strabon, les Insulaires de Paros? Evénement dont ne parlent point & que n'auroient pas oublié sans doute les Marbres de cette Isle de Paros connus sous le nom de Marbres d'Arundel, qui contiennent bien des faits moins importans; outre que Paros n'a pas été par sa situation à portée d'être habitée avant Tasso ni par conséquent de la peupler, se trouvant & plus éloignée du continent & du nombre des Cyclades de l'autre côté de l'Archipel. D'ailleurs cette tradition suivie par Strabon n'est pas préférable à celle qu'Hérodote avoit reçue longtems auparavant. Quelle apparence aussi que cette Isle ait eu, avant les noms de *Thasos* & de *Thassus*, ceux d'*Aëria* & d'*Æthria*, comme le dit Pline! Je soupçonne que cet auteur aura confondu l'Isle de *Thassus* avec quelque autre, & peut-être tout à la fois avec l'Isle de „Créte qu'il dit lui-même au Liv. IV. Chap. XII. de son Histoire, avoir „été nommée auparavant *Aëria*, & avec l'Isle de Rhodes qui suivant „encore son propre témoignage Liv. V. Chap. XXXI. eut entre ses dif-„férens noms celui d'*Æthræa*.“ Après tout l'erreur de ces deux Ecrivains est peut-être excusable, pour n'avoir eu ni l'un ni l'autre aucune connoissance de *Tarscis*. Il en faut dire autant de Pausanias qui attribue la fondation de *Thasos* à *Thasus* fils d'Agénor, & de même encore du Poëte Lucain qui rapporte le nom de la ville de *Tarse* à un mot Grec qui signifie la hardiesse. Sur quoi André Morel remarque qu'en ce cas on auroit écrit *Tharse* avec un *h*, parce que la premiere lettre du mot Grec est un Θ & non un T. Mais comment cet habile antiquaire, qui ne devoit pas ignorer que *Tarse* avoit tiré son nom de *Tarscis* chef de la Colonie qui l'avoit fondée, peut-il dire ensuite sérieusement sur la foi d'Aviénus Auteur du V Siecle, „que ce nom vient du mot *Tarsos* qui signifie la plante du pied ou le „talon, parce que Bellerophon se le brisa en y tombant à bas du che-„val Pégase?“ Comment Aviénus lui-même a-t-il pu donner dans cette origine chimérique; & le Savant Jules Africain, Chrétien du „III Siecle, attribuer tout aussi fabuleusement la fondation de *Tarse* à

„Per-

„Persée fils de Jupiter & de Danaë, ou au défaut de celui-là à un riche „Ethiopien nommé Sandon?" Enfin, après eux tous, Ubbo Emmius & Samuel Bochart, ces modernes si savans dans les langues & dans l'histoire, qui auroient dû encore moins ignorer que l'Isle de *Tasso*, ou de *Thasos* comme l'appelloient les Grecs, avoit tiré son nom & l'origine de ses premiers habitans, de ce même *Tarscis* fils de Javan; ont-ils pu dire à leur tour; l'un sur la simple autorité de Pausanias, „que l'Isle de *Thasus* a pris ce nom de *Thasus* fils d'Agénor Roi de Phé„nicie;" personnage de pure invention, dont ne parlent ni les marbres de Paros ni aucun des Auteurs qui ont fait mention des enfans d'Agénor, au nombre de trois fils, Phénix, Cilix, Cadmus, & deux filles Taygete & Europe. Et l'autre, je parle de Bochart, „que cette „Isle fut d'abord nommée Cryse à cause de son or, mais que s'y étant „depuis établi une Colonie de Phéniciens, elle prit le nom de *Thasos*. „parce que dans la langue Phénicienne le mot *Thas* signifie une lame „& que dans cette Isle on faisoit des lames d'or?" On a reproché aux adorateurs d'Homere & à la plupart des Traducteurs d'avoir affectionné leurs Auteurs au point de croire y trouver tout. De même le savant Bochart tout plein de sa langue Phénicienne y rapportoit tout & l'appliquoit à tout, mais (s'il est permis de le dire) avec moins de fondement & autant d'inconséquence en cette occasion qu'on en trouveroit dans le raisonnement d'un Italien ou d'un François entêtés chacun de leur langue, lesquels pourroient dire, suivant la méthode de Bochart, & avec plus de raison que lui, „que l'Isle de *Tasso* fut d'a„bord nommée *Tarscis*, qui signifie en Hébreu fouilleur ou tailleur de „marbre, (car cela est très vrai:) mais que cette Isle ensuite ayant re„çu une Colonie d'Italiens ou de François, prit le nom de *Tasso*, par„ce que dans la langue Italienne le mot *Tazza* & dans la Françoise ce„lui de *Tasse*, signifient une coupe, un vase à boire, & que dans cette „Isle on faisoit des coupes de marbre (& voilà l'inconséquence)." D'ailleurs il n'est pas vrai que les Mines de *Tasso* bornées à l'Isle ayent été d'or plutôt que d'argent, de fer, d'étain & de plomb, comme je le montrerai tout à l'heure. Et il est également faux que cette Isle ait

 eu

eu le nom de Cryse avant celui de *Thasos*, parce que ce nom de *Thasos* est évidemment une corruption du nom primitif *Tarscis*, que les Grecs adoucirent pour l'accommoder au génie de leur langue. De sorte qu'on ne peut pas dire que le nom de *Tarscis* ait été éteint, comme il auroit dû l'être, par celui de Cryse, puisqu'il s'est constamment perpétué jusqu'aujourd'hui, malgré l'altération qu'il a soufferte chez les Grecs, chez les Latins & ensuite chez les Vénitiens, qui lui ont donné tour à tour les noms de *Thasis* ou de *Thasos*, de *Thasus* ou de *Thassus* & enfin celui de *Tasso*; à moins qu'on ne suppose que le hazard seul a pu produire le rapport & la ressemblance qui se trouve entre ces noms & celui de *Tarscis*, sans qu'ils ayent rien de commun entr'eux; ce qui est contre toute vraisemblance. Il s'ensuit donc de là que l'Isle de *Tasso* n'a jamais porté le nom de Cryse. Mais Bochart a sans doute, pour appuyer son étymologie, métamorphosé en Cryse le lieu appellé Crines, qui comme on l'a vû plus haut dans Diodore de Sicile, n'étoit pas l'Isle de *Thasos*, mais une ville de Macédoine peuplée par des *Thasiens* sortis de leur Isle; & d'ailleurs cette ville quitta son nom de Crines, non pour prendre le nom de *Thasos*, mais celui de Philippes.

Parmi les modernes je me bornerai aux témoignages de trois Ecrivains qui peuvent donner quelque idée de l'état actuel de l'Isle de *Tasso*. Le premier est Jean George Schlederus de Ratisbonne, qui dans un Dictionnaire historique Latin plus ancien que le Moreri, dit au mot *Thassus*: „C'est une Isle de l'Archipel du côté de la Thrace, „aujourd'hui appellée *Thasso*, & située entre les bouches du fleuve „Nessus & le mont Athos. Elle est couverte d'arbres, assez fertile „& fort peuplée. Elle a une ville du même nom bâtie dans une plai„ne le long d'un grand Golfe vers le Nord; & ce Port est à deux „milles (d'Allemagne) du Continent de la Macédoine. La ville est ri„che par les Mines d'or & d'argent du Continent voisin, &c.“ Je ne ferai qu'une remarque sur ces Mines voisines de *Tasso*. Suivant les témoignages anciens que j'ai cités, c'étoient purement des Mines d'or. Si donc il y en a d'argent, ou plutôt s'il y en avoit, car je doute qu'elles

les subsistent actuellement, il faut que ces dernieres ayent été dans l'Isle, & c'est aussi ce que je montrerai tout à l'heure.

Riccioli, Italien, est le second Ecrivain que je citerai. On trouve dans sa Géographie Reformée Liv. III. Ch. XV. une Table alphabétique de l'Archipel, „parmi lesquelles l'Isle de *Tasso* est placée sous ce nom à son rang: mais en même tems il y est dit qu'elle „s'appelloit anciennement *Thassus* & qu'elle a de tour 40 milles „d'Italie."

Le troisieme enfin est Boschini, Auteur de la même Nation, qui n'a laissé rien à désirer sur ce sujet dans son Archipélago. Il remarque d'abord „que cette Isle est à quatre milles d'Italie, (ou „à une mille d'Allemagne comme je l'ai observé plus haut) du Continent de la Romanie. Son circuit, continue-t-il, est de 35 à „40 milles d'Italie (8 à 10 milles d'Allemagne) & le terrain en est „fort inégal, en partie plaines & en partie montagnes. Les montagnes du côté méridional ont des carrieres d'où l'on tire un marbre admirable. Il y a des vignobles dont le vin est excellent. „Il y croît aussi un grand nombre de pins & de sapins. On y „voit des monceaux d'écumes de métaux qui montrent que cette Isle avoit autrefois de bonnes Mines. En effet Philippe, Roi de „Macédoine, & Alexandre le Grand, en tiroient 80 talens tous les „ans. Il s'y établit anciennement une Colonie de Phéniciens qui „y bâtirent la ville à laquelle ils donnerent le nom de l'Isle. Elle „y subsiste encore, mais dans un état bien différent de sa premiere „splendeur, quoiqu'elle soit assez bien peuplée."

Après avoir ainsi rapproché ces différens témoignages anciens & modernes, il me reste à faire voir qu'ils renferment les caracteres les plus convenables à l'Isle de *Tarscis*, & par conséquent les plus propres, je ne dis pas à fortifier mon opinion, mais à achever de constater ma découverte en la portant au dernier degré d'évidence.

Premiérement, l'Isle de *Tasso* a eu des Mines. C'est ce que disent Hérodote, Diodore, & autres; & c'est ce que prouvent ces monceaux d'écumes de métaux qu'on y trouve encore suivant Boschini. Il a plu à Bochart pour fonder ses vaines étymologies de Cryse & de *Thas*, de supposer que les Mines de *Thaso* étoient d'or. Mais comme les trois Auteurs nommés ne spécifient point ces Mines, & qu'au contraire Diodore, Plutarque, Polidamus & autres, parlant des Mines du Continent, ont toujours eu l'attention de les spécifier, on peut inférer de là que les *Thasiens* n'eurent des Mines d'or que quand ils eurent acquis ces Mines du Continent voisin; & qu'ainsi celles de leur Isle pouvoient être des Mines de tout autre métal. Or, dans le tems d'Ezéchiel, où il est à croire qu'ils ne possédoient point encore les Mines du Continent, l'Isle de *Tarscis* avoit précisément des mines de toutes sortes de métaux, à l'exception de l'or, puisque ce Prophete dit dans son Chap. XXVII, parlant à la ville de Tyr: „Ceux de *Tarscis* ont trafiqué avec toi de toutes sortes de richesses, faisant valoir tes foires „par leur argent, leur fer, leur étain & leur plomb." A quoi Jérémie ajoute Chap. X, que „l'argent qui est étendu en lingots est „apporté de *Tarscis* pour être mis dans les mains du fondeur & de „l'ouvrier." Il n'est point là question d'or, comme on voit. Ainsi voilà un grand trait de ressemblance entre l'Isle de *Tasso* & l'Isle de *Tarscis*, l'une & l'autre ayant eu des Mines, & des Mines de divers métaux à la reserve de l'or.

Secondement, suivant Pline, Pausanias & Boschini, l'Isle de *Tasso* a des carrières d'un marbre admirable dont on a fait les plus beaux Ouvrages de l'Antiquité: Et *Tarscis* en Hebreu, selon Mrs. Desmarets dans leur Interprétation des noms propres de l'Ecriture, signifie *fouillant le marbre;* étant apparemment tiré de ces deux mots, CHATHAR fouir, & SCHAJISCH marbre, dont on a fait par abréviation *Tharschisch* & ensuite *Tarscis*.

Troisièmement, au tems où arriveroit la destruction de Tyr prédite par Isaie, la nouvelle en devoit venir aux navires de *Tarscis*, du

du pays de Kittim, c'est à dire de la Macédoine, parce que c'étoit Alexandre le Grand qui détruiroit cette ville. Et l'on voit dans Diodore, que les habitans de *Tasso* allérent s'établir à Crines sous la protection de Philippe Roi de Macédoine; que suivant Pline, l'Isle de Tasso est dans le même parallele que la Macédoine; qu'au rapport de Schlederus le continent de la Macédoine n'est qu'à deux milles du Port de *Tasso;* & qu'enfin cette Isle, comme l'assure Boschini, étant sous la domination du même Philippe & d'Alexandre son fils, rendoit à ces Rois de Macédoine tous les ans 80 talens de ses Mines. Preuve donc que ce qu'Ezéchiel dit des navires de *Tarscis* doit s'entendre de ceux de *Tasso*.

Quatriémement, c'est aux navigateurs *Thasiens*, suivant Pline, c'est à dire à ceux de *Tasso*, qu'est due l'invention des vaisseaux de mer longs & couverts. Ces bâtimens que Pline appelle *constratæ naves*, étoient nommés par les Grecs *Cataphractes*, navires pontés, forts & pour ainsi dire armés de toutes piéces. Et à quel Peuple marin convenoit-il mieux de s'immortaliser par l'invention d'une construction navale si remarquable, qu'à un Peuple aussi renommé par ses navigations, qu'étoit celui de *Tarscis?* Je ne les décrirai point ici parce qu'elles feront la matiere d'un autre Mémoire.

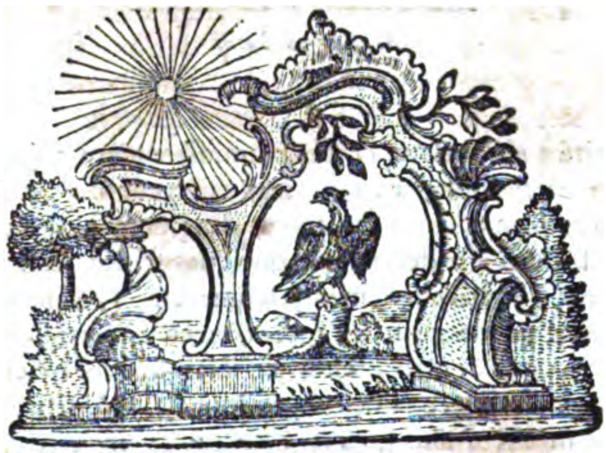
Cinquiémement, conçoit-on qu'il eût été possible aux navigateurs de *Tarscis* de dresser ces flottes qu'ils louerent à Salomon, qui leur acquirent tant de réputation sur la mer, & qui les mirent en état d'en partager l'empire avec les Tyriens; conçoit-on, dis-je, cette possibilité, s'ils n'avoient eu autant de facilités pour se procurer les bois de construction, qu'en avoient les Tyriens, voisins & maîtres du Mont Liban? Mais ceux de *Tarscis* eux-mêmes n'avoient rien à désirer en ce point, puisque leur Isle, c'est à dire l'Isle de *Tasso*, étoit couverte de bois dont elle est encore remplie, suivant Schlederus; & que ces bois, au rapport de Boschini, sont précisément des pins & des sapins, les arbres du monde les plus

plus utiles & les plus propres pour les constructions navales. Outre qu'avec ces bois, *Tarscis* avoit encore, suivant Ezéchiel, du fer & du plomb, autres matériaux également nécessaires, & qu'elle avoit l'une & l'autre en assez grande abondance, aussi bien que l'argent & l'étain, pour en fournir même à la ville de Tyr. Et ces métaux étoient les productions de ces Mines de *Tasso*, dont parlent Hérodote, Diodore, Schlederus & Boschini.

Sixiémement, après la figure, si je puis m'exprimer ainsi, que l'Isle de *Tarscis* fait dans l'Ecriture, on ne pouvoit s'attendre à la retrouver que dans une Isle puissante & célébre. Et c'est ce qui convient encore parfaitement à l'Isle de *Tasso*, dont les auteurs que j'ai cités, sans ceux qui ne sont pas venus à ma connoissance, ont célébré l'ancienne opulence & tous les avantages dignes de la réputation de l'Isle de *Tarscis;* mais qui, sujette aux vicissitudes & à la décadence comme toutes les choses du monde, après s'être vû recherchée par les plus grands Rois; avoir été l'égale de Tyr; avoir fondé des Colonies comme Syme ou Oesyme, Galepse, Crines & autres; avoir possédé des richesses immenses, & fait connoître son nom presque dans tout l'univers, déchut insensiblement de ce haut point de gloire & de splendeur, jusqu'à perdre sa liberté par les mains des Athéniens; mais, toute subjuguée qu'elle étoit, ayant encore assez de ressources pour inquiéter ses fiers oppresseurs, puisque ce ne fut qu'après avoir perdu 33 vaisseaux & souffert un siége de trois ans avec tout le courage que peut inspirer le regret de la dépendance & l'amour de la liberté, qu'elle succomba pour jamais, n'ayant été délivrée dans la suite du joug des Athéniens, que pour tomber sous la puissance des Macédoniens, puis sous celle des Romains, quoique Pline dise que de son tems elle n'étoit sujette à personne; de là sous la domination des Empereurs Grecs, ensuite sous le gouvernement des Vénitiens, & aujourd'hui sous celui des Turcs.

Enfin, s'il est vrai que l'Isle de *Tasso* reçut autrefois une Colonie de Phéniciens, comme l'ont dit Hérodote, Pausanias & Boschini,

ni, faut-il chercher ailleurs que dans cet établissement, non seulement la raison du grand commerce de ceux de *Tarscis*, de leurs fameuses navigations, en un mot de leur habileté dans la marine; mais aussi le motif de leurs liaisons étroites avec les Tyriens qui étoient, comme on sait, Phéniciens de nation? Ainsi il n'est plus étonnant, ni que Salomon ait employé à ses navigations la flotte de *Tarscis* de concert avec celle d'Hiram, Roi de Tyr; ni que le Prophete Isaïe prédisant la destruction de Tyr l'ait annoncée à ceux de *Tarscis* comme un événement qui les intéressoit au point que leur force en dût être détruite; ni qu'Ezechiel à son tour ait parlé du grand trafic que ceux de *Tarscis* avoient droit de faire aux foires de Tyr, regardant cette ville avec complaisance, & pour employer le langage du Prophete, „les navires de *Tarscis* la célébrant dans „leurs chansons.“ Concluons donc de tout cela, que *Tasso* doit être cette même *Tarscis*, ou que cette derniere n'existe plus dans l'univers.



DISSERTATION
SUR
LES TROIS PRINCIPALES MACHINES DE GUERRE DES ANCIENS,
SAVOIR
LA CATAPULTE, LA BALISTE ET L'ONAGRE,
TIRÉES EN QUELQUE SORTE DES MINES DES MONUMENS DE L'ANTIQUITÉ TANT GRECQUE QUE ROMAINE.

On y a joint l'exposé que VITRUVE *a donné de ces Machines, & on l'a éclairci par des Notes.*

PAR M. SILBERSCHLAG.

Traduit du Latin.

I.

Si l'Antiquité a eu quelque chose qui puisse encore aujourdhui exciter notre admiration, ce sont sans contredit ces machines prodigieuses qui servoient à lancer des traits, des poutres, des cailloux, des feux, des cadavres, à la distance de quelques stades, dans les villes assiégées, pour y porter l'écrasement, le carnage, l'incendie & la peste. J'ai été longtems en doute si les forces méchaniques suffisoient pour produire des effets aussi forts, aussi terribles & aussi funestes; j'accusois les Anciens d'avoir eu la démangeaison d'exagérer des choses qui aujourdhui ne méritent plus gueres d'attention; mais je trouvois d'un autre côté, dans le consentement unanime de tant de siècles, une preuve qui mettoit les récits des Ecrivains à l'abri de toute contestation. Tous les Capitaines dont les exploits ont été secondés par ces

ces machines, sont autant de témoins, que le célébre Folard a réunis dans son Commentaire sur Polybe, pour en former une espece de musée.. Car ces monstrueuses pieces d'Artillerie qu'on a fait succéder immédiatement aux Balistes & aux Catapultes, que prouvent-elles autre chose sinon que de tout tems les Conquérans se sont servis de moyens gigantesques pour accabler leurs Ennemis, & les écraser sous des poids énormes!

II. Les choses étant ainsi, il paroit d'abord surprenant qu'aussitôt après la découverte de la poudre à canon, tout l'appareil d'un art aussi ancien se soit en quelque sorte évanoui, & qu'à l'exception de la Colonne Trajane & d'un ou deux autres monumens où l'on en trouve des vestiges obscurs, il ne s'en soit conservé aucun dessein; de sorte que dans notre siecle tous ces objets sembloient pleinement condamnés à un éternel oubli. Il se présente à mon esprit plusieurs raisons que je pourrois alléguer à ce sujet; mais les suivantes suffiront sans doute. Premierement, nos ancêtres ne tarderent pas à s'appercevoir que les boulets & les bombes qui partent de nos canons & de nos mortiers, étoient ce qu'il y avoit de plus propre à porter partout la terreur & la mort. Ensuite, tout éblouis de cette nouvelle invention, ils s'en promirent des succès plus grands que ceux auxquels l'expérience a conduit. Enfin & surtout, les matériaux dont on fabriquoit les anciennes machines, les cordes & le bois, n'avoient pas à beaucoup près la consistance & la durée de nos pieces d'artillerie de fer & de bronze; pour les conserver, il falloit des réparations continuelles, qui n'empêchoient pas qu'on ne fut bientôt obligé d'en construire de nouvelles. Je ne me repens pas d'avoir employé bien du tems, du travail & des fraix, à ressusciter en quelque sorte des instrumens meurtriers, qui ne laisseroient pas d'avoir encore leur utilité dans un siege où la poudre & les boulets viendroient à manquer. Je pourrois peut-être indiquer d'autres avantages de cette découverte; mais je les passe sous silence, parce que je ne veux pas que mon nom soit associé à celui de *Barthold Schwartz*, qui est noirci aux yeux de la plûpart des hommes. Je ne dirai donc rien de la diminution des fraix, de la facilité du transport,

& des dangers inévitables pour l'ennemi qui est toujours incertain du coup qui doit le terrasser, le lieu où la baliste est placée n'étant décelé, ni par la lueur, ni par le fracas qui accompagnent l'effet des foudres de guerre.

III. Quant au calcul dont cette tractation auroit besoin, il ne me convient pas d'y apporter toute l'exactitude algébrique, puisque tout ce travail ne sauroit mener à rien, jusqu'à ce que l'expérience ait fait connoitre avec certitude la force élastique des cordes & le plus grand degré de tension qu'elles peuvent soutenir. D'ailleurs, je n'ai d'autre but que de bien représenter la forme & la structures de ces machines, à la recherche desquelles tant d'habiles gens ont travaillé en vain; & je soumets mon exposé, avec toute la modestie qui me convient, aux doctes arbitres dont j'ai fait choix. Je n'ai employé aucunes corrections, quoique plusieurs se soyent présentées à mon esprit d'elles-mêmes; mais j'ai tourné toute mon attention à bien exécuter tout conformément aux préceptes des plus anciens Architectes.

IV. De tous ceux qui ont écrit sur les machines de guerre, les plus exacts sont Vitruve, Philon & Héron. Ces trois Auteurs distingués ne doivent point être séparés; en les réunissant, ils forment un Auteur accompli. Ce qu'Héron décrit, Philon en donne les mesures; & ce qui est omis par Philon, Vitruve le fournit, & recueille en quelque sorte les débris du naufrage. C'est ce qui m'a engagé à suivre principalement ce dernier, qui, dans les Sections XV. XVI. & XVII. de son Livre X. traite de l'art de construire de grandes machines de guerre (*tormenta*). Mes explications du texte de Vitruve renfermeront tout ce que Philon & Héron nous enseignent, soit à titre d'éclaircissement, soit comme critique. Je finirai par la description de l'Onagre tirée d'Ammien Marcellin. Mettons-nous donc à l'examen de Vitruve, & ne soyons pas surpris d'y trouver des descriptions malaisées, qui ont été encore plus mal expliquées. Il y auroit même d'assez grosses fautes contre la Grammaire à relever dans son stile; mais nous ne nous y arrêterons pas.

TEXTE

TEXTE DE VITRUVE.

LIB. X. SECT. XV.

De Catapultarum & Scorpionum rationibus.

§. 5. *Nunc vero, quæ ad præsidia periculi & necessitatem salutis sunt inventa, id est, scorpionum, catapultarum & balistarum rationes, quibus symmetris comparari possint, exponam. Et primum de catapultis & scorpionibus.* Etymologia.

TRADUCTION DE M. PERRAULT *).

Des Catapultes & des Scorpions.

Il faut maintenant traiter des proportions qu'il est nécessaire d'observer pour la construction des machines de guerre, & dont on a besoin pour se défendre, sçavoir des Scorpions, des Catapultes, & des Ballistes. Et en premier lieu des Catapultes & des Scorpions.

J'ai sous la main deux Editions de Vitruve, l'une de Lyon, 1586, l'autre de Venise, 1567. Dans celle-ci, les termes de Vitruve sont: *de catapultarum &* scorpionibus *rationibus.* Item: *quæ ad præsidia salutis sunt* inventæ. Ce que je n'observe qu'afin d'indiquer, quand il se rencontrera des variantes, laquelle des deux Editions est préférable à l'autre. Pour moi, il me paroit que celle de Lyon a été faite d'après un MS. plus correct & plus digne de foi; quoique les Observations de *Daniel Barbarus* dont l'Edition de Venise est enrichie, soyent fort supérieures à celles de *Castillon* qui se trouvent dans l'Edition de Lyon.

A l'égard du nom, en comparant entr'eux les Auteurs Latins qui ont rapporté des faits militaires, on rencontre tant de différence, & une ambiguité dans l'usage des termes dont Vitruve se sert pour désigner ces instrumens poliorcétiques, qui va fort au delà de ce à quoi l'on

*) p. 329. de la seconde Edition de son *Vitruve*, Paris, 1684. On a cru que les Lecteurs ne seroient pas fâchés de juger par cette Traduction des efforts assez inutiles que M. *Perrault* a faits pour donner l'intelligence de ces Machines.

l'on auroit dû s'attendre par rapport à des choses qui étoient alors, & si connues, & si nécessaires. Ce que Vitruve appelle du nom effrayant de *Scorpion*, est dit dans Ammien Marcellin *Onagre* (espece de balisste). D'autres nomment la balisste catapulte, & la catapulte balisste. Cette confusion a jetté la plûpart des Interpretes & des Machinistes dans un labyrinthe d'erreurs & de préjugés: ils n'ont pu se conduire qu'à tâtons & avec la plus grande incertitude. Il ne faut en excepter, ni Procope, ni Polybe, ni même ce célebre Chevalier de Folard, si versé d'ailleurs dans ce qui concerne l'art de la Guerre. Les Grecs sont louables de s'être bornés à distinguer entre les *εὐθύτονα* & les *παλίντονα*. Les premieres de ces Machines lançoient seulement des traits; les autres des traits & des pierres; ce qui leur faisoit donner aussi le nom de *λιθοβόλοι*. J'en appelle au témoignage d'Athénée qui, dans son Livre V. fait mention d'un pierrier, d'où partoient des pierres du poids de trois talens, & une lance de douze coudées. Isidore rapporte que la balisste, au moyen de cordes tendues, chassoit avec une grande force, tantôt des lances, tantôt des pierres. Je suis tout à fait dans l'idée que le nom de *καταπέλτης* vient de *κατὰ*, *contre*, & *πέλτη*, *bouclier*; & qu'on ne doit le donner qu'aux machines qui lançoient des traits, parce que c'étoit des traits qu'on se servoit pour percer les boucliers. Le mot de balisste tire son origine de *βάλλειν*, parce que ces machines donnoient aux pierres un mouvement parabolique. Ainsi, dans toute la suite de ce Mémoire, nous entendrons par *catapulte*, une machine à lancer des traits, & par *balisste* une machine à lancer des pierres. La catapulte exprime mieux la figure du scorpion que l'onagre d'Ammien Marcellin, dont je parlerai ailleurs avec plus d'étendue. Suivons pour le présent Vitruve, qui ne met aucune différence entre la catapulte & le scorpion. Outre cela, on appelloit *tormenta*, ces machines dont les cordes se tendoient d'abord à force de bras, & qui, recevant ensuite un mouvement gyratoire, communiquoient leur force aux corps qu'on vouloit lancer.

TEXTE

TEXTE DE VITRUVE.

§. 6. *Omni igitur proportione eorum ratiocinata ex proposita sagittæ longitudine, quam id organum mittere debet, cujusque nonæ partis fit foraminum in capitulis magnitudo, per quæ tenduntur nervi torti, qui brachia continere catapultarum debent.* *Modulus catapultarum.*

TRADUCTION DE M. PERRAULT.

La regle de la proportion de ces machines se prend sur la longueur du dard qui est jetté, dont on prend la neuvieme partie pour déterminer la grandeur des trous de la catapulte par lesquels on bande les cordes faites de boyau qui attachent les bras des catapultes.

Comme, dans l'artillerie moderne, on prend le diametre des boulets pour calibre des canons; de même les anciens prenoient la neuvieme partie de la flêche pour déterminer la mesure de la catapulte & de toutes ses parties. Leur maitre à cet égard étoit l'usage, qui ne tarda pas à leur faire découvrir quelle partie de la longueur de la flêche fournissoit la proportion la plus convenable à toutes les parties de la Machine. Jusqu'ici tout est aisé à comprendre. Il faudroit seulement que Vitruve, pour déterminer la longueur, la largeur & l'épaisseur de ces parties, n'eût pas employé des caracteres tout à fait inconnus, & qui s'éloignent de l'usage de tous les autres Architectes. Les Grecs n'ont point cru devoir enveloper leur doctrine de ces traits presque magiques. Ils se servent bien des lettres de l'Alphabet, mais de la maniere & dans l'ordre usités dans la vie ordinaire. Pour ne pas fatiguer le lecteur par de trop longs préliminaires, j'exposerai en peu de mots ce que je pense des caracteres de Vitruve. La premiere question se reduit à savoir, si chacun de ces caracteres désigne un nombre, ou non? En parcourant le Texte même, on rencontre divers endroits où ces caracteres : ⁝ ∴ ⁞ ⁝ K ne signifient rien, ou marquent seulement l'omission de quelque signe faite par le copiste; par exemple, — *& ejus IK crassitudo:* item — *cheloni replum quod*

quod est operimentum securiculæ includitur K: item — *Juculæ longitudo* ⁝ ⁝ *foraminum II:* item — *ut habent curvaturam molliter circumactam* ⁝ ⁝ ; item — *trium* ⁝ ⁝ *interiorum regularum:* item — *brachii* ⁝ ⁝ *longitudo*, pour ne pas rapporter divers autres endroits qui paroissent appuyer mon sentiment. *Jocundus* lui-même le favorise, en jugeant que ces signes disposés en forme circulaire ou quarrée, n'ont aucune signification certaine, mais ne servent qu'à distinguer les membres des périodes. Il seroit seulement à souhaiter que le bon *Jocundus* ne se fût pas trompé à d'autres égards, & qu'il n'eût pas jetté Perrault qui l'a pris pour guide dans un fatras de conjectures incertaines. Celui-ci, Savant d'un ordre distingué, & qui a fait beaucoup d'honneur aux sciences mathématiques, s'est fort illustré par sa belle Traduction Françoise de Vitruve, Ouvrage véritablement magnifique; mais, en s'appuyant sur l'autorité de *Jocundus*, a admis les suppositions les plus fausses, &, en voulant exprimer par des nombres ces points arrangés en cercles & en quarré, il a surpassé la témérité de son prédécesseur, & a tout mis sens dessus dessous. Ainsi, au lieu de décrire des catapultes & des balistes, il ne fait qu'offrir le chaos le plus étrange.

Une seconde question concerne l'interprétation des caracteres qui désignent manifestement quelque nombre. Tandis que j'étois en suspens sur la valeur qu'il faloit leur attribuer, les Oeuvres d'Euclide sont tombées entre mes mains, de l'Edition de *Jean Hervagius*, faite à Bâle en 1546, & j'y ai trouvé p. 458. une Table dressée par *Campanus*, Interprete d'Euclide, que je crois devoir rapporter ici, afin qu'on ne croye pas dans la suite que j'ai donné à ma fantaisie les significations de ces nombres.

„Nos ancêtres, dit Campanus, divisoient chaque tout en douze parties égales qu'ils appelloient onces; & ils désignoient ces parties par les signes suivans:

12.

12	11	10	9	8	7	6,
FF,	S=-=,	S==,	S3,	-S-,	V,	S,
As,	*Deunx*,	*Dextans*,	*Dodrans*,	*Bes*,	*Septunx*,	*Semissis*,

5	4	3	2	1
=-=,	==,	=-,	=,	-.
Quincunx,	*Triens*,	*Quadrans*,	*Sextans*,	*Uncia*.

„Ils partageoient de nouveau l'once en douze parties, mais d'une „maniere toute différente, comme on peut le voir ci-dessous.

$\frac{1}{2}$ once	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$
Є,	VV,	G,	V,	⋇,	CIƆ,
Semuncia,	*Duella*,	*Sicilicus*,	*Sexcula*,	*Drachma*,	*Semissicla*,

$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{48}$	$\frac{1}{72}$	$\frac{1}{96}$	$\frac{1}{144}$
H,	ƵƵ,	ഗ,	M,	Z,	C III,
Tremissis,	*Scrupulus*,	*Obolus*,	*Bissiliqua*,	*Ceraces*,	*Siliqua*,

$\frac{1}{192}$
Q.
Chalcus.

Tout cela posé, on voit que les mesures de Vitruve s'accordent assez exactement avec les proportions de Philon, à la reserve de deux endroits, (altérés peut-être par les Copistes,) qui y répugnent. Cet accord des Grecs avec l'Architecte Romain, moyennant la supposition précédente, ajoute un grand poids à mon opinion.

A' présent traçons la ligne ou virgule βελοστοίχων de Vitruve. Je l'ai représentée dans la Pl. VII. Fig. 6. & dans la Pl. IX. Fig. 2.

TEXTE DE VITRUVE.

§. 7. *Eorum autem foraminum capituli sic deformatur altitudo & latitudo. Tabulæ quæ sunt in summo & imo capituli, parallelique vocantur, fiunt crassitudine unius foraminis, latitudine unius & ejus dodrantis, in extremis foraminis unius & semis.* **Peritreton.**

Or, afin que les chapiteaux où ſont les trous ayent une largeur & une épaiſſeur convenable, on les fait en cette maniere. Les pieces de bois que l'on appelle paralleles, & qui compoſent le haut & le bas du chapiteau, doivent avoir d'épaiſſeur le diametre d'un des trous; leur largeur doit être d'un diametre & de trois quarts d'un diametre, en ſorte que vers l'extrémité elles n'ayent que la largeur d'un diametre & demi.

Vitruve appelle le plinthe des catapultes chapiteau, parce que cette piece eſt très propre à repréſenter la tête du ſcorpion, la partie dite ſyrinx ſe rapportant à la queue, & les bras aux ſerres.

Planche VII. Fig. 3. Le chapiteau étoit compoſé des deux peritretes A, B, que Vitruve appelle les tables ou pieces de bois qui compoſent le haut & le bas du chapiteau, & qui doivent être paralleles. Il y avoit outre cela les deux paraſtates ou liens *ab* & *cd*; dont *ab* eſt à gauche & *cd* à droite: enfin, les deux meſoſtates ou liens du milieu *ef* & *gh*. C'eſt ſur ces quatre ſoutiens que portoient les deux péritretes.

Dans chacun de ces péritretes, dont on voit la figure Planche VII. Fig. 2. on perçoit deux trous par lesquels en y mettant deux barillets, on tendoit les cordes deſtinées à produire le mouvement. Le diametre du trou répondoit au diametre de cette partie du barillet qu'on faiſoit entrer dans le trou. Le barillet même, dont je décrirai la forme plus exactement quand il ſera queſtion des baliſtes, contenoit dans ſon creux le volume de cordes auquel les bras étoient inſérés. Les lettres CDEF de la Fig. 3. Planche VII. indiquent les barillets. Or le diametre du volume des cordes étoit toujours égal à la neuvieme partie de la longueur de la flèche, à quoi il faut ajouter l'épaiſſeur du métal $= \frac{1}{16}$ pour l'ordinaire. Je n'ai pas beſoin après cela d'avertir que le diametre du trou, ou le calibre du péritrete, répondoit à la neuvieme partie de la longueur de la flèche & à l'épaiſſeur double du métal. Philon exprime les autres meſures du péritrete en ces termes. *Καὶ τὸ μὲν περιτρητὸν ποιεῖν.* Μῆκος *ἔχον διαμέτρων* ϛ S'', (c'eſt à dire, de ſix

&

& demi,) πλάτος ἐκ μέσου μετρούμενον διαμέτρων δύο. ἐκ δὲ τῶν ἄκρων διαμέτρων δύο. ἐκ δὲ τῶν ἄκρων διαμέτρου μιᾶς καὶ ἡμισείας· πάχος τρήματος ἑνός.

Soit donc la longueur du péritrete, Fig. 2: $ab = VI\frac{1}{2}$, ou même par diverſes raiſons je l'aimerois mieux $= VII$. Pour la meſure de la longueur, Vitruve l'a entierement négligée; & il ſe trompe auſſi s'il prend la moyenne largeur d'un diametre & $\frac{3}{4}$, puiſque Philon lui attribue deux diametres. La largeur du péritrete d'une baliſte eſt $= II\frac{1}{6}$. Pourquoi n'en feroit-il pas de même de celle d'une catapulte? Soit donc $cd = II\frac{1}{6}$. Or les deux Auteurs ſont d'accord, tant à l'égard de la largeur aux extrémités $ef = I\frac{1}{2}$ que de l'épaiſſeur $bg = I$ diametre.

TEXTE DE VITRUVE.

§. 8. *Paraſtatæ dextra ac ſiniſtra præter cardines altæ foraminum quatuor, craſſæ foraminum quinum. Cardines foraminis S ϑ a foramine ad medianam paraſtatam item foramines S ϑ. Latitudo paraſtados mediæ unius foraminis, & ejus IK craſſitudo foraminis. Intervallum ubi ſagitta collocatur in media paraſtade foraminis partis quartæ. Anguli quatuor qui ſunt circa in lateribus & frontibus laminis ferreis aut ſtylis aereis & clavis configantur.* **Paraſtata.**

TRADUCTION DE M. PERRAULT.

Les poteaux ou liens qui ſont à droite & à gauche doivent outre les tenons avoir la hauteur de quatre diametres & la largeur de cinq; les tenons doivent être de trois quarts de diametre; & de même, depuis le trou juſqu'au poteau du milieu, il doit y avoir trois quarts de diametre. La largeur du poteau du milieu doit être d'un diametre & d'un quart de diametre; & ſon épaiſſeur d'un diametre. L'intervalle qui eſt dans le poteau du milieu, à la droite duquel on place le javelot, doit être de la quatrieme partie d'un diametre. Il faut que les quatre

tre angles qui sont tant aux côtés qu'au devant, soient garnis de bandes de fer attachées avec des cloux de cuivre ou de fer.

Vitruve enseigne trois choses dans ce paragraphe.

Planche VII. 1. Il décrit les parastates ou liens Fig. 3, le droit *cd*, & le gauche *ab*, en omettant l'entaille *on*, où les bras reposoient. Tous les parastates & les mesostates, c'est à dire les poteaux en général, avoient une seule & même longueur, savoir celle de quatre diametres. Il ne faut point faire d'attention à Philon quand il borne cette longueur à III½, car il est en contradiction avec lui-même, puisqu'il dit ailleurs: „Chaque *hemitonium*, si l'on s'en rapporte à l'usage qui „est le meilleur de tous les maîtres, doit avoir la longueur des cordes „= VIII diametres:" longueur à laquelle il ne parviendra pas, si les poteaux n'ont que III½ de hauteur, à moins que, contre tout usage & toute raison, il n'assigne aux barillets une hauteur, ou plutôt une éminence au dessus des péritretes de III½ diametres.

La largeur des parastates avec celle du péritrete aux extrémités doit nécessairement être = I½. Mais il seroit difficile de deviner ce que Vitruve entend par une épaisseur *foraminum quinum.* Ainsi il faut recourir à Philon qui assigne aux parastates l'épaisseur de la moitié & outre cela de la huitieme partie d'un diametre.

On avoit besoin de tenons qui fussent insérés dans les mortaises des péritretes, percés convenablement á cet usage. Vitruve en détermine la largeur seulement = ½ + ¼ d'once. L'épaisseur des tenons doit toujours être moindre que celle des parastates, Fig. 2. lett. oooo.

Vient à présent un endroit corrompu, que Vitruve lui-même, s'il ressuscitoit, n'entendroit pas.

A foramine ad medianam parastatam item foraminis S9.

Je crois qu'il faut le corriger ainsi.

Ad foramen mediæ parastatæ inserendis cardinibus item foraminis S9.

Vitru-

Vitruve aura craint que quelque ignorant, trompé par la largeur des mesostates, n'en donnât une plus grande aux tenons, au grand préjudice des péritretes; & c'est cette méprise qu'il a voulu prévenir.

2. Il décrit les mesostates Fig. 3. *cf*, *gh*, dont la largeur de deux diametres s'accorde avec la largeur moyenne du péritrete. Mes Editions portent *ii*, mais à faux; & il est manifeste que ces caracteres doivent être changés en II. Dans les paroles *& ejus IK crassitudo foraminis* — la négligence du copiste a laissé échaper le caractere S ═ ═. L'échancrure du milieu *tu*, où la flêche, (mais comme il n'est pas question ici de flêche, je lis *syrinx*,) passe entre les tringles du milieu, est d'un quart de diametre. Cela servoit à affermir le *syrinx*. Planche VII Fig. 1.

3. L'armure du chapiteau est énoncée en ces termes. „Les quatre angles qui sont tant aux côtés qu'au devant doivent être garnis de „bandes de fer, attachées avec des cloux de cuivre ou de fer.“ C'est afin que la violente tension des cordes ne brise, ni le péritrete, ni les parastates, des catapultes: ce qui doit s'entendre également des péritretes des balistes.

TEXTE DE VITRUVE.

§. 9. *Canaliculi, qui Græce Σύριγξ dicitur, longitudo foraminum XVIII. Regularum, quas nonnulli bucculas appellant, quæ dextra & sinistra canalem figuntur, foraminum XVIII. altitudo foraminis unius & crassitudo.* Σύριγξ.

TRADUCTION DE M. PERRAULT.

La longeur du petit canal qui est appellé *Syrinx* en Grec, doit être de dix-neuf diametres. Les tringles appellées par quelques uns *buccula*, qui sont attachées à droite & à gauche pour former le petit canal, doivent aussi être longues de dixneuf diametres; & il faut que leur épaisseur & leur largeur soit de la grandeur d'un diametre.

 Le

Le *Syrinx* des Catapultes conſiſtoit dans un canal, où l'on menoit une dioſtre (dont il ſera parlé plus au long dans le §. ſuivant, Pl. I. Fig. 1. *af*, *ch*) taillée dans le milieu des tringles CD, dans deux lames de fer dentelées *mn*, *kl*, qui devoient empêcher le recul de la dioſtre E, & dans le moulinet *uw* par lequel on la tiroit en bandant la Machine. C'eſt ce que témoignent ces paroles d'Héron: Ἡ γὰρ σύριγξ, ἐν ᾗ ἐςὶν ἡ διώςρα καὶ τὸ χελώνιον καὶ ἡ χεὶρ ἐπὶ τῶν μὲν εὐθυτόνων σύριγξ κέκληται.

La longeur des tringles étoit = XVIII diametres; leur largeur & leur épaiſſeur = 1. Il me ſemble que les anciens ont déſigné tout le tronc de la catapulte par le nom de *canaliculus* ou petit canal, ou *ſyrinx*, puiſque Vitruve dans la ſuite fait une mention particuliere du canal du fond, qui ſervoit proprement de paſſage à la ζ dioſtre, à moins que par le canal du fond il ne vaille mieux entendre la dioſtre même.

TEXTE DE VITRUVE.

Sucula. §. 10. *Et affiguntur regulæ duæ in quas inditur ſucula, habentes longitudinum foraminum trium, latitudinem dimidium foraminis: craſſitudo bucculæ quæ affigitur, vocitatur camillum, ſeu quemadmodum nonnulli, loculamentum ſecuriclatis cardinibus. Fixa foramini i altitudo foraminis S. Suculæ longitudo ⁞ : foraminum ⁞ : craſſitudo ſuculæ foraminum ϑ.*

TRADUCTION DE M. PERRAULT.

On ajoute en cet endroit deux regles dans leſquelles eſt paſſé un moulinet long de trois diametres. L'épaiſſeur du *buccula* qui s'y attache, eſt appellée *ſcamillum* par quelquesuns, & *loculamentum* par d'autres. Ce *buccula* eſt joint par des tenons à queue d'hirondelle, longs de la grandeur d'un diametre, & larges d'un demi-diametre. La longueur du moulinet eſt de neuf diametres & de la neuvieme partie d'un diametre. Le gros rouleau eſt de neuf diametres.

Au

Au bout du Syrinx on attachoit deux tringles *qs*, *rt*, de la longueur de trois diametre & de la largeur d'un demi-diametre, entre lesquelles on attachoit le moulinet, moyennant lequel on tiroit la dioſtre par des cordes. En traitant des baliſtes, Vitruve appelle ces tringles *chelonium ad axonia;* & les Architectes donnoient à leur épaiſſeur le nom de *loculamentum ſecuriclatis cardinibus*, parce que l'on poſoit dans la cavité *a* le col du moulinet, les anciens Méchaniciens, & ſurtout Vitruve, déſignant par le nom de *loculamentum* le trou dans lequel tournoient les pivots des roues, comme qui diroit en Allemand *Zapfen-lager*. Ces *loculamenta* avoient à leur extrémité un tenon à queue d'hirondelle, *ſecuriculam*, ou *cardinem ſecuriculatum*, *cbde*, afin que, par le moyen de ce tenon, cette piece tint plus fortement au Syrinx, qu'on tailloit de chaque côté pour recevoir ces tenons à queue d'hirondelle. Planche VII. Fig. 1. Fig. 7. Fig. 7.

Par l'épaiſſeur de la fixe à $\frac{1}{10}$, l'Auteur entend le *replum*, la *ſusbande* ou le fermant de fer, *fgh*, courbé en *g* en demi-cercle; & il déſigne cette courbure par la hauteur de la fixe = $\frac{1}{2}$. La fixe, c'eſt cette couverture, ainſi dite parce qu'elle affermit le moulinet, pour empêcher qu'il ne ſorte de ſon *loculamentum*, lorsqu'il eſt tourné.

La longueur & l'épaiſſeur du moulinet, quand même Vitruve n'en diroit rien, doivent être déterminées par la ſtructure de ſon *chelonium*. Soit donc la longueur de la partie du milieu de ce moulinet = 1, celle du col = $\frac{1}{2}$ celle de la tête = $\frac{1}{2}$, l'épaiſſeur moyenne = $\frac{1}{2}$, toute la longueur = III. Au reſte on faiſoit tourner ce moulinet avec des barres ou leviers.

Il reſte à remarquer que l'Edition de Lyon porte *fixam* au lieu de *fixa*, & à la derniere ligne, *foraminum IX* au lieu de *foraminum* 9, deux leçons qui ſont manifeſtement fautives.

TEXTE DE VITRUVE.

§. 11. *Epitoxidos longitudo foraminum.* S =—, *craſſitudo* =—. *Item chelo, ſive manucla, dicitur longitudo foraminum III. & craſſitudo* S =—. *Canalis fundi longitudo foraminum XVI, craſſitudo foraminis* ∴ *latitudo* S =—. Dioſtre.

TRA-

TRADUCTION DE M. PERRAULT.

La longueur de l'*Epitoxis* eſt d'un demi-diametre & d'un huitieme, & ſon épaiſſeur d'un huitieme de diametre. Le *chelo*, qui s'appelle auſſi *manucla*, eſt long de trois diametres. Son épaiſſeur eſt d'un demi-diametre & d'un huitieme. La longueur du canal qui eſt embas, eſt de ſeize diametres. L'épaiſſeur eſt la neuvieme partie d'un diametre, & la largeur d'un demi-diametre & d'un huitieme.

Si Héron avoit gardé le ſilence, on auroit bien de la peine à deviner le ſens de cet endroit; mais, en conſultant cet auteur, il paroit que Vitruve parle de la dioſtre, c'eſt à dire, du canal, qui moyennant le moulinet étoit tiré en arriere pour bander la corde vibrante, & d'où la flêche poſée ſur l'*Epitoxis* partoit, dès qu'on lâchoit la corde, avec tant de rapidité, que, ſuivant le témoignage d'Ammien Marcellin, elle paroiſſoit étinceler. Le mot de Διώςρα doit être dérivé *ἀπὸ τῦ διωςᾶςαι*, parce qu'on la faiſoit paſſer par la cavité du canal du ſyrinx; c'eſt pourquoi l'Auteur Latin l'appelle *le canal du fond*, c'eſt à dire, poſé au fond du ſyrinx, ayant pour longueur XVI diametres, & pour épaiſſeur un. La largeur eſt exprimée dans Vitruve par la meſure S ═ —, mais diverſes raiſons m'ont engagé à la pouſſer jusqu'à un diametre. Au milieu de la dioſtre étoit ſon *epitoxis*, de la même longueur que la dioſtre, & qui portoit le dard. Les propres termes du texte prouvent qu'il faut y faire ici une correction. Il y a: *Epitoxidos longitudo foraminum* S ═ —, caractere qui ne quadre point avec le mot de *foraminum* au plurier. Je lui accorde une largeur ═ $\frac{1}{4}$, ce qui fournit en même tems l'épaiſſeur du dard que tous les Auteurs ont négligé d'évaluer.

Planche VII. Fig. 4. Outre l'*epitoxis*, la dioſtre avoit auſſi le *chelo*, ou la *manucla*, en Grec *χεὶρ*. C'eſt ici que j'ai les plus grandes obligations à Héron, qui a décrit cette *manucla* avec une fidélité & une netteté qui ne laiſſent rien à déſirer. Je vais donner la traduction de ſes propres termes, en conſervant les lettres caractériſtiques indiquées Fig. 4. Voici donc comment cet excellent Artiſte dépeint la *manucla*.

„A'

„A la surface supérieure de la dioſtre ſont attachées deux for-
„tes lames de fer droites $\alpha\beta$, qui tiennent enſemble par embas γ, &
„entre lesquelles il y a peu de diſtance. Qu'on place dans l'intervalle
„qui les ſépare le doit de fer γ, recourbé en deſſous à l'endroit λ.
„Que ce doit à l'extrémité ſoit fendu en deux pointes, ſemblables à
„celles qu'on nomme ſcondyles, & qu'entre les becs il n'y ait d'inter-
„valle qu'autant qu'il en faut pour recevoir l'épaiſſeur du dard.
„Qu'on faſſe paſſer par les trous tant des lames que du doit, un petit
„clou rond au milieu. Voilà pourquoi le doit ſusdit $\nu\xi o$ doit être
„fendu afin qu'on puiſſe faire paſſer le petit clou μ. Enfin que, ſous
„la partie ξo, on place la détente de fer $\pi\varrho$, mobile autour du Fig. 1.
„petit clou π, fixé dans la regle ſupérieure (de la dioſtre). Quand
„donc la détente $\pi\varrho$ aura été placée au deſſous du doit, elle le
„tient tellement en arrêt qu'il ne peut plus tourner en-haut. Ainſi,
„en ſaiſiſſant l'extrémité ϱ, qu'on retire la détente $\pi\varrho$, alors le cro-
„chet $\nu\xi$ tournera en-haut."

Un peu plus bas, Héron ſe ſert des termes de l'art pour dé-
ſigner chacune de ces pieces, appellant le doit $\nu\xi o$, τὴν χεῖρα; les
lames $\alpha\beta$, κατόχους; & la petite regle $\pi\varrho$, σχαστηρίαν. En voilà
aſſez ſur la *manucle*, longue de trois diametres, large & épaiſſe de
$\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$. Vous en trouverez le deſſein Fig. 1. au bout de la dioſtre.

TEXTE DE VITRUVE.

§. 12. *Columella eſt baſis in ſolo foraminum VIII. latitudo in* **Columna anterior.**
plinthide, in qua ſtatuitur columella foraminis S ═ —, *craſſitudo F z.*
Columellæ longitudo ad cardinem foraminum XII ∴ *latitudo foraminis*
S ═ — *craſſitudo i i ϑ. Ejus capreoli tres, quorum longitudo forami-*
num VIIII, latitudo dimidium foraminis ∴ *craſſitudo z cardinis longi-*
tudinis ∴ . *Columellæ capitis longitudo I S K. Anteſixa latitudo*
foraminis a S ∴ *craſſitudo i.*

La petite colonne avec ſa baſe qui eſt près de terre, a huit diametres, & à la droite du plinthe qui eſt ſur la petite colonne, elle a un demi-diametre & un huitieme; l'épaiſſeur eſt d'un douzieme & d'un huitieme de diametre. La longueur de la petite colomne juſqu'au tenon a douze neuviemes de diametre; la largeur eſt d'un demi-diametre & d'un huitieme. L'épaiſſeur eſt du tiers de cette largeur: les trois liens de la petite colomne ont de longueur neuf diametres, de largeur un demi-diametre & un neuvieme, & d'épaiſſeur un huitieme. Le tenon eſt long de la neuvieme partie d'un diametre. La longueur de la tête de la petite colonne eſt d'un diametre & demi, & d'un quart de diametre. La largeur de la piece de bois qui eſt plantée devant, eſt d'un diametre & demi & de la neuvieme partie d'un diametre en y joignant un neuvieme de neuvieme: l'épaiſſeur eſt d'un diametre.

Dans l'Edition de Lyon, après les paroles de la derniere ligne *foraminis a* S : ⁞ : on a mal à propos ajouté le caractere ϑ; & dans l'Edition de Veniſe le *i* qui ſuit le dernier mot *craſſitudo* eſt chargé avec beaucoup moins de raiſon encore en *id eſt*.

Vitruve employe ces termes mal arrangés pour donner une deſcription bien complette du ſupport antérieur, qui porte le chapiteau de la catapulte. Nous ſommes appellés à rétablir l'ordre dans cette confuſion, & à répandre du jour au milieu de ces obſcurités.

Pl. VIII. Fig. 1. Il décrit 1. la baſe. Ces mots *columella & baſis in ſolo* ont exiſté, ſi je ne me trompe, dans l'original, de la maniere ſuivante: *Columellæ baſis in ſolo*, &c. Soit en conſéquence la baſe ab = VIII diametres quant à la longueur: & la piece de bois plantée devant cd = IIII. (nombre que l'auteur a ſupprimé.) Que ces trois pieds ſoyent en largeur $= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$, en épaiſſeur *ii*ϑ, peut-être *vv*ϑ, car la *duella* avec le *ſicilicus* ne ſuffiſent pas ici, & ne donnent pas aſſez de ſoutien

cien à ces bois. Toute personne entendue jugera bien par elle-même de l'épaisseur qu'il faut donner à cette base.

2. Les trois liens *e*, *f*, *g*, qui tiennent à la base, & qui s'appuyent au montant ou à l'arbre. Les Allemands appellent ces liens *streben*. La longueur assignée ici est = VIII, la largeur = $\frac{1}{4}$, l'épaisseur = $\frac{1}{16}$ d'once, ou = à un cerax, ce qui est de toute fausseté: & ainsi chacun peut se déterminer ici à son gré.

3. Le montant ou l'arbre même, dont la longueur *ch* jusqu'à la tête = XII. Je ne sçai pourquoi l'épaisseur de cette piece doit différer de sa largeur: ôtons cette différence, & supposons un arbre rond, ou quarré, dont le diametre s'accorde avec la largeur de la base = $\frac{1}{2}$ + $\frac{1}{4}$ = $\frac{3}{4}$, c'est à dire = S3, ou, si vous l'aimez mieux = F.

4. La tête du montant ne pourra être autre chose qu'une sorte de chelonium, qui soutient la catapulte, & qui permet qu'on tourne la machine, pour lui donner la direction nécessaire. La Fig. 1. montre la structure de cette tête.

hk est la longueur de la tête = I + $\frac{1}{4}$,

m le clou passé par les côtés de la tête, & en même tems par le chelonium au péritrete inférieur; au moyen duquel clou la catapulte pouvoit être élevée.

kn le tenon = $\frac{1}{2}$ auquel répond le trou fait avec une vriliere dans le tronc, pour aider le mouvement horizontal.

TEXTE DE VITRUVE.

§. 13. *Posterior minor columna, quæ Græce dicitur ἀντίβασις foraminum octo, latitudo foraminis Si, crassitudinis* F z. *Subjectio foraminum XII. latitudinis & crassitudinis ejusdem, cujus minor columna illa. Supra minorem columnam chelonium, sive pulvinus dicitur foraminum* S : ⁝ : *altitudinis* II S : ⁝ : *latitudinis* SI =—. *Carchebi sucularum foraminum* IISI : ⁝ : *crassitudo foraminis* SII : ⁝ : *latitudo* I S. *Transversariis cum cardinibus longitudo foraminum* X : ⁝ : *latitudo* IS : ⁝ : *decem & crassitudo. Brachii longitudo* IS *foraminum VII.* *Columna posterior.*

La plus petite colomne qui est derriere, & qui est appellée en Grec *Antibasis*, a huit diametres: sa largeur est d'un diametre & demi, son épaisseur d'un douzieme & d'un huitieme de diametre. Le chevalet a douze diametres de largeur; son épaisseur est égale à la grosseur de la plus petite colomne. Le *Chelonium* ou oreiller qui est au dessus de la plus petite colomne, a deux diametres & demi & un neuvieme de long, & autant de haut; sa largeur est d'un demi-diametre & d'une huitieme. Les mortaises du moulinet ont deux diametres & demi & un neuvieme. Leur profondeur est de deux diametres & demi & d'un neuvieme: la largeur d'un diametre & demi. Les traversans avec les tenons ont dix diametres & un neuvieme de long, un diametre & demi & un neuvieme de large, & dix d'épais. La longueur des bras est de huit diametres & demi.

Ici de nouveau l'injure du tems a furieusement défiguré le Texte de Vitruve, en sorte que presque toutes les phrases de ce passage sont transposées & altérées. Commençons par les rassembler; mettons-les ensuite chacune à sa place, & finissons par rétablir le tout dans sa parfaite intégrité. Il est question de l'*antibase*, & du pied sur lequel reposoit le montant du second support, qui étoit plus petit que celui qui portoit la tête de la machine.

Le but que les Artistes s'étoient proposé dans l'érection de cette piece, ne pouvoit être que de donner un support au syrinx, & de placer ce qu'on peut nommer la queue de la catapulte. Ce support devoit être mobile pour mettre en état de diriger les traits vers le but; c'est pourquoi non seulement on la mettoit sur un parquetage (en Allemand *eine Bettung*,) mais on y adaptoit des roulettes, (*carchesia*, que l'Auteur appelle, je ne sçai pourquoi *carchebos*,) dont on se servoit pour mener tout doucement la machine à droite ou à gauche: à quoi l'on ajoutoit aussi l'oreiller garni d'un long tenon qu'on introduisoit dans la colomne percée en longueur, & on affermissoit le

tout

tout au moyen d'une vis, qui faisoit monter ou descendre le syrinx, suivant que l'exigeoit la situation du but. Après ces observations préliminaires, voici les détails même d'une maniere exacte.

La longueur du montant *ab* étoit = VIII diametres, la largeur = $\frac{1}{2}$ + $\frac{1}{10}$ l'épaisseur = $\frac{2}{3}$ + $\frac{1}{7}$. Je ne balancerois pas à faire la largeur égale à l'épaisseur, savoir = $\frac{2}{3}$ + $\frac{1}{7}$. Pl. VIII. Fig. 2.

Le chelonium *cd*, ou l'oreiller, reposoit sur le montant; & soit sa longueur = II $\frac{1}{2}$.
sa hauteur = $\frac{1}{2}$ + $\frac{1}{10}$,
sa largeur = $\frac{1}{2}$ + $\frac{1}{10}$.

Notre Auteur a entierement oublié la base, ou plutôt il l'a laissée au bon plaisir de l'ouvrier. Pour moi je conseillerois de lui donner quatre pieds, dont chacun auroit la longueur de trois ou tout au plus de quatre diametres.

Le parquet *efgh* étoit une table quarrée, ayant en longueur & en largeur XII. diametres, dont l'épaisseur dépendoit de celle des poutres & des planches posées sur les solives. Vitruve donne à l'épaisseur I $\frac{1}{2}$ diametre, quoique la moitié de cette mesure suffise abondamment. Quand toutes les autres déterminations manqueroient, un habile Méchanicien seroit toujours en état, la longueur, la largeur & l'épaisseur du parquet étant données, d'arranger un plancher convenable sous la catapulte. Mais Vitruve, à force de vouloir rendre claire une chose qui l'étoit assez par elle-même, a tout envelopé dans les plus épaisses ténebres.

Si l'on suit ses ordres, le parquet doit avoir XII diametres, & se construire au moyen de poutres latérales, sur lesquelles on en plaçoit de transversales avec des tenons à queues d'hirondelle. Il est donc nécessaire que ces pieces réunies ayent la longueur de XII diametres. Or celle des pieces de traverse, les tenons en étant exceptés, étoit = X. Il ne faut donc pas lire: *Transversariis cum cardinibus*, mais *sine cardinibus*. Le mot *decem*, dans l'endroit où il est placé, paroit vuide de

 sens

ſens. Ceux-ci: *longitudo brachii* IS *foraminum VII.* indiquent qu'il s'eſt gliſſé une extreme confuſion dans les meſures.

Je penſe qu'ici le Copiſte aſſoupi, ou fatigué par un trop long travail, a jetté les mots au hazard ſur le papier, tels qu'ils ſe préſentoient à ſes yeux appeſantis. Mais pourquoi perdre plus de tems à débrouiller ce galimathias? Le Lecteur ſera ſans doute plus ſatisfait, ſi je lui préſente les détails précédens réunis ſous un même point de vue, en plaçant vis à vis l'un de l'autre le Texte altéré, & le Texte corrigé, afin qu'il en juge par lui-même.

TEXTE CORROMPU.	TEXTE RÉTABLI.
Poſterior minor columna quæ Græce dicitur ἀντίβασις, foraminum octo, latitudo foraminis S.I. *craſſitudinis* F z. *Subjectio foraminum XII latitudinis & craſſitudinis ejusdem, cujus minor columna illa. Supra minorem columnam chelonium ſive pulvinus dicitur, foraminum* II S : ⁝ : *altitudinis II.* S : ⁝ : *latitudinis* S.I:—. *Carchebi ſucularum foraminum II.* S I : ⁝ : *craſſitudo foraminis* S II : ⁝ : *latitudo* I S : ⁝ : *Transverſariis cum cardinibus longitudo foraminum* X : ⁝ : *latitudo* I S : ⁝ : *decem & craſſitudo. Brachii longitudo* I S *foraminum VII. &c.*	Poſterior minor columna, quæ Græce dicitur ἀντίβασις, foraminum octo (longitudine) latitudine foraminis S I, craſſitudine F z. Supra minorem columnam chelonium, ſive pulvinus dicitur foraminum II S. (longitudinis) altitudinis S, latitudinis S:—. Subjectio cujus minor columna illa latitudinis & craſſitudinis (ſeu potius longitudinis) ejusdem foraminum, ſcilicet XII. Tranſverſariorum (ſubjectionis) exceptis cardinibus longitudo foraminum decem, latitudo & craſſitudo I S. Carcheſiis ſucularum foraminum II S I (longitudo) craſſitudo foraminis S ii, latitudo I S. Brachii longitudo foraminum VII. &c.

Reſtent les *carcheſia* fixés au parquet, que l'Edition de Lyon appelle *carchebi*, & celle de Veniſe *tracheli.* Si je ne me trompe, Vitruve veut que de chaque côté il y ait un petit moulinet, dont les ſup-

rapports ayent en longueur II S diametres, en épaisseur S:: & en largeur I S.

TEXTE DE VITRUVE.

§. 14. *Brachii longitudo foraminum VII crassitudo ab radice foraminis* F z, *in summo foraminis* i i z, *curvaturæ foraminum octo.* **Brachium.**

TRADUCTION DE M. PERRAULT.

La longueur du bras est de huit diametres & demi, leur épaisseur vers le bas est d'une douzieme partie de diametre & d'une huitieme. Leur courbure est de huit diametres.

Le bras, tant des catapultes que des balistes, consistoit en trois parties, savoir, 1. l'entaille sur laquelle on jettoit la corde vibrante, 2. le col στ qu'on faisoit entrer dans les cordes; & la *pterna* ω, qui reposoit sur une entaille des poteaux du milieu faite à cette fin. Par la courbure, Vitruve ne peut entendre autre chose que la ligne φχ qui détermine l'inclinaison du bras tendu, Pl. VII. Fig. 1. **Planche IX. Fig. 10.**

TEXTE DE VITRUVE.

§. 15. *Hæc iis* (au lieu de *iis*, il faut lire *variis*,) *proportionibus, aut adjectionibus, aut detractionibus, comparantur. Nam, si capitula altiora quam erit latitudo, facta fuerint, quæ anatona dicuntur, de brachiis demetur, ut quo mollior est tonus propter altitudinem capituli, brachii brevitas faciet plagam vehementiorem. Si minus altum capitulum fuerit, quod catatonum dicitur, propter vehementiam, brachia paullo longiora constituentur, uti facile ducantur. Namque, quemadmodum vectis, quum est longitudine pedum quatuor, quod onus a quinque hominibus extollitur, is, si est pedum octo, a duobus, elevatur; eodem modo brachia, quo longiora sunt, mollius, quo breviora, durius ducuntur.* **Epilogue.**

TRADUCTION DE M. PERRAUT.

Il faut ainsi proportionner ces bras, & faire en sorte que, si le chapiteau est plus haut que la longueur des bras ne requiert,

quiert, ce qui le fait appeller *Anatonum*, on les accourcisse, afin que cette élévation ou hauteur du chapiteau, qui est cause que les bras sont moins tendus, étant recompensée par l'accourcissement des bras, la machine puisse frapper avec assez de force; & au contraire, si le chapiteau est moins haussé, ce qui le fait appeller *Catatonum*, les bras doivent être plus tendus; c'est pourquoi on les allonge, afin qu'ils puissent être courbés aisément jusqu'où il faut. Car, de même qu'un levier qui, étant de quatre pieds, est suffisant pour faire que quatre hommes puissent remuer un fardeau, fera que le même fardeau, sera remué par deux, s'il est long de huit pieds, ainsi, plus les bras de la catapulte seront longs, & plus il y aura de facilité à les bander, de même qu'il y aura plus de difficulté, plus ils seront courts.

Les dernieres paroles: *eodem modo brachia, quo longiora sunt, mollius*, manquent entierement dans l'Edition du Venise.

Au reste, l'Auteur, en ajoutant ce corollaire à sa tractation, montre comment, lorsque les cordes péchent par l'excès ou le défaut de longueur, on peut y remédier en allongeant ou en accourcissant les bras. Il appelle les chapiteaux dont les cordes ont trop de longueur, *anatona*, c'est à dire, trop étendus, & par là même foibles rélativement aux cordes: ceux dont les cordes se trouvent plus courtes qu'il ne faut, sont dits *catatona*, ou trop resserrés, parce que les cordes opposant une trop grande résistance à l'action des bras sont dans un extreme danger de se rompre. En finissant il éclaircit ce probleme d'une maniere assez superficielle par l'exemple du levier. Comme il n'y a point d'apprentif en Méchanique à qui cette doctrine ne soit parfaitement connue, je la passe sous silence; & je viens à l'examen de la Baliste.

TEX-

TEXTE DE VITRUVE.

SECTIO XVI.

De Baliſtis.

§. 16. *Catapultarum rationes, ex quibus membris & proportionibus comparantur, dixi. Baliſtarum autem rationes variæ ſunt & differentes, unius effectus cauſſa comparatæ.* Nomen.

TRADUCTION DE M. PERRAULT.

CHAPITRE XVI.

Des Balliſtes.

J'ai traité des parties dont la Catapulte eſt compoſée & de leurs proportions. Pour ce qui eſt des Balliſtes, elles ſe font de diverſes manieres, qui ne ſont toutefois que pour un même effet.

La machine monſtrueuſe dite *Baliſte*, étoit appellée par les Grecs παλίντονον (voy. §. 5.) parce que ſes bras n'étoient pas tendus au moyen d'une corde unique, comme les εὐθύτονα, mais qu'on les bandoit avec deux cordes qui alloient d'un bras à l'autre en forme de ceinture. Baldus à la vérité, dans ſes Scholies, ſur la *Belopoieïque* de Héron, croit que les παλίντονα avoient quelque reſſemblance avec les arcs des Turcs, que l'on tend à rebours; ou bien qu'on les nommoit ainſi parce que la zone qui frappoit le coup, avoit une anſe attachée au milieu pour y inſérer le doit. Mais, ni la baliſte n'avoit aucune reſſemblance avec l'arc des Turcs, ni l'anſe de la zone ne peut ſervir de rien à cette étymologie, comme il eſt aiſé de le comprendre.

TEXTE DE VITRUVE.

§. 17. *Aliæ enim vectibus & ſuculis, nonnullæ polyſpaſtis, aliæ ergatis, quædam etiam tympanorum torquentur rationibus.* *Diſcrimen ratione magnitudinis.*

TRADUCTION DE M. PERRAULT.

Il y en a que l'on bande avec des moulinets & des leviers, d'autres avec des mouffles, d'autres avec des vindas, & d'autres avec des roues à dents.

C'étoient les plus petites pour lesquelles on pouvoit se servir de leviers & de moulinets, les moyennes exigeoient déja des mouffles & des vindas; les plus grandes enfin qui vomissoient des pierres du poids de dix talens, tendoient les bras avec une telle roideur qu'aucune force humaine n'étoit suffisante pour attirer la corde par la dioftre, & alors on avoit recours aux roues. Plutarque rapporte d'Archimede que, dans le fameux siege de Syracuse, il lança des pierres pesant dix talens: & pour ne pas en alleguer d'autres exemples, Julien l'Apostat s'est servi d'une baliste, dont la pierre renversoit d'un seul coup une tour entiere des assiégés. Cependant les Anciens plaçoient autour d'une ville plus de catapultes que de balistes. Philippe, suivant le témoignage de Polybe, se servit au siege de Thebes de CL catapultes & de XXV balistes. Tite foudroya Jerusalem avec CCC catapultes & XL balistes. Cela fait assez voir, combien ces machines étoient funestes aux Villes, surtout quand on lit qu'elles lançoient non seulement des traits & des pierres, mais des feux grégeois, des globes enflammés, des cadavres d'hommes & des chevaux, qui, partant des balistes, sembloient tomber du ciel au milieu des villes.

TEXTE DE VITRUVE.

Modulus. §. 18. *Sed tamen nulla balista perficitur, nisi ad præpositam magnitudinem ponderis saxi, quod id organum mittere debet. Igitur de ratione earum non est omnibus expeditum, nisi qui arithmeticis rationibus numeros & multiplicationes habent notas.*

TRADUCTION DE M. PERRAULT.

Mais la grandeur de toutes doit être proportionnée à la pesanteur de la pierre qu'elles jettent: & il est pas aisé de concevoir

cevoir quelles font ces proportions, si l'on n'est bien versé dans l'Arithmétique, & principalement dans la multiplication.

Ce seul endroit prouve plus clair que le jour que les Anciens déterminoient les proportions des balistes, comme on fait aujourdhui celle des pieces d'artillerie, par le diametre des boulets, ou pierres qui en tenoient lieu; en sorte que la *Bélopée* des anciens est la mere de l'artillerie moderne. Les calculs d'Arithmétique & les multiplications ont principalement pour objet de trouver le diametre des boulets, travail qu'on exécute par l'extraction de la racine cubique. Si l'on souhaite de savoir comment les Grecs s'y prenoient, il n'y a qu'à tirer de Philon *), le Passage suivant où cet Auteur découvre le secret de l'art: Τὸ τȣ̃ λίθȣ βάρος, ἐὰν δέῃ τὸ ὄργανον συςήσασθαι, εἰς μονάδας ἀγαγεῖν, καὶ τȣ̃ συναχθέντος πλήθȣς ἐκ τῶν μονάδων ἡ πλεύρα. Τοσȣ́των δακτύλων τὴν τοῦ τρήματος διάμετρον ποιεῖν, προσθέντας καὶ τὸ δέκατον μέρος τῆς εὑρεθείσης πλευρᾶς. Ἐαν δὲ μὴ ἔχῃ ῥητὴν τὴν πλεύραν τὸ βάρος, ὡς ἔγγιςα λαμβάνειν. Καὶ ἐὰν μὴ ὑπεράγῃ τὸ δέκατον μέρος, ἔλασσον πειρᾶσθαι τὸ ὡς ἔγγιςα τῷ κατὰ λόγον. Ἐὰν δὲ προσλειπῃ, προσιθέντα τὸ δέκατον προσαναπληροῦν.

TEXTE DE VITRUVE.

§. 19. *Namque fiunt in capitibus foramina, per quorum spatia contenduntur, capillo maxime muliebri vel nervo funes, qui magnitudine ponderis lapidis quem debet ea balista mittere, ex ratione gravitatis proportione sumuntur, quemadmodum catapultis de longitudinibus sagittarum.* *Diameter foraminum in capitibus.*

TRADUCTION DE M. PERRAULT.

On fait au chapiteau de la baliste des trous par où l'on passe des cables faits de cheveux de femme, ou de boyau; ces cables doivent être gros à proportion de la pesanteur de la pier-

 re

*) Βελοποιικῶν λογ. Δ.

re que la baliste jette, de même que, dans les catapultes, les proportions se prennent de la grandeur des javelots.

Comme la neuvieme partie de la longueur de la flèche servoit de calibre aux catapultes; de même le diametre du boulet de pierre déterminoit le trou par lequel on tendoit les cordes, & toutes les autres proportions des balistes. On se servoit principalement pour faire les cordes de cheveux de femme. Lorsque les Romains assiegerent Carthage, toutes les Carthaginoises dépouillerent leurs têtes pour cet usage. Héron dit aussi qu'on employoit la peau qui couvre les épaules de toutes les especes d'animaux, à l'exception des porcs; mais, quand on pouvoit avoir les nerfs des pieds de cerf, ou des cols de taureaux, on se passoit volontiers de toute autre matiere. On faisoit de grandes provisions de ces cordes, & on les conservoit dans un vaisseau rempli d'huile.

TEXTE DE VITRUVE.

Collatio ponderum Græcorum cum modulo Romanorum.

§. 20. *Itaque, ut etiam ii qui Geometriæ Arithmeticæque rationes non noverint, habeant expeditum, ne in periculo bellico cogitationibus detineantur, quæ ipse faciendo certa cognovi, quæque ex parte accepi a præceptoribus, finita exponam, & quibus rebus Græcorum pensiones ad modulos habeant rationem ad eam, ut etiam nostratis ponderibus respondeant, tantum explicita.*

TRADUCTION DE M. PERRAULT.

Or, afin que ceux qui ne savent pas les regles de la Géométrie & de l'Arithmétique se puissent instruire de ces choses, & que dans les périls de la Guerre ils ne soyent pas en peine de s'en embarrasser l'esprit; je veux mettre ici par écrit ce que j'en ai appris, tant de mes Maîtres que par ma propre expérience; à quoi j'ajouterai le calcul que j'ai fait pour réduire à nos poids ceux qui sont en usage parmi les Grecs.

Il seroit bien à souhaiter que l'Auteur eût dégagé sa promesse avec plus de succès. J'ignore par quel Maître Grec il avoit été instruit:

instruit: ce n'est pas au moins par Philon, dont il s'éloigne extraordinairement. Il sera pourtant à propos d'examiner ces proportions des mesures & des poids des Grecs avec les poids & les mesures des Romains, afin d'être mieux en état de porter un jugement sur les calculs de Philon & de Vitruve.

Il n'y a sans contredit point d'Ecrivain qui ait pris plus de peine pour vérifier & comparer les mesures des anciens que George Agricola, dans son traité des mesures & des poids, dont Guillaume Philander a donné un abrégé. Je crois qu'il est non seulement convenable, mais même nécessaire, de s'en rapporter à lui. Or voici comment il détermine les proportions suivantes.

1. La livre Romaine est de douze onces, dont seize sont notre livre d'Allemagne.
2. La mine attique, dont 80 font un grand talent & 60 un petit, avoit 100 dragmes.
3. Le talent de 80 mines étoit égal à 83 livres & 4 onces. Donc la livre étoit d'une ½ once plus legere que la mine attique.
4. Les anciens Grecs aussi bien que les Romains divisoient le pied en 16 pouces; mais le pied Romain étoit plus court que l'Attique d'une *semuncia*, c'est à dire, de ⅜ de pouce.

TEXTE DE VITRUVE.

§. 21. *Nam quæ balista dua pondo saxum mittere debet, foramen erit in ejus capitulo digitorum V; si pondo quatuor, digitorum VI; si octo, digitorum VII* ⁝ *decem pondo digitorum VIII* ⁝ *viginti pondo, digitorum X* ⁝ *quadraginta pondo, digitorum XII S.K. sexaginta pondo, digitorum XIII & digiti octava parte: octoginta pondo, digitorum XV* ⁝ *centum viginti pondo pedis I. S. & sesqui digiti* ⁝ *centum & sexaginta pondo pedum* 11 *& digitorum V: ducenta pondo pedum II & digitorum VI: ducenta decem pondo, pedum* 11 *& digitorum VII* ⁝ *CCL pondo: XI. S.* (peut-être que le chiffre est fautif ici, & qu'il faut plutôt mettre *pedum* II. S.) Determinatur longitudo moduli.

 TRA-

La Balifte qui jette une pierre de deux livres, doit avoir le trou de fon chapiteau de la largeur de cinq doits: fi la pierre eft de quatre livres, il doit être de fix à fept doits; fi elle eft de dix livres, il fera de huit doits; fi elle eft de vint livres, il fera de dix doits; fi elle eft de quarante livres, il fera de douze doits & trois quarts. Si elle eft de foixante livres, il fera de treize doits & d'une huitieme partie; fi elle eft de quatre-vint livres, il fera de quinze doits; fi elle eft de fix-vint livres, il fera d'un pied & demi & d'un demi doit; fi elle eft de cent foixante livres, il fera de deux pieds; fi elle eft de cent quatre-vint livres, il fera de deux pieds & cinq doits; fi elle eft de deux cens livres, il fera de deux pieds & fix doits; fi elle eft de deux cens dix livres, il fera de deux pieds & fept doits. Si elle eft de deux cent cinquante livres, il fera de deux pieds & onze doits & demi.

Ce feroit perdre fes peines que de vouloir concilier ces mefures, ou entr'elles, ou avec celles de Philon. L'un & l'autre de ces Auteurs fourmillent de fautes, & font manifeftement voir qu'ils n'avoient pas appris l'extraction de la Racine cubique. La Table fuivante en fera foi. La premiere & la feconde colonne rapportent les proportions de Vitruve, la troifieme offre les véritables, & la quatrieme exprime celle de Philon.

TABLE.

TABLE.

Vitruve					*Philon*		
Poids	Diametre suivant le pied Romain.		Vraye proportion.		Mines	Diametre suivant le pied attique.	
	pieds	pouces	pieds	pouces		pieds	pouces
II	—	5	—	5	—	—	—
IIII	—	6	—	$6\frac{2}{10}$	—	—	—
VIII	—	7	—	$7\frac{1}{10}$	—	—	—
X	—	8	—	$8\frac{5}{10}$	X	—	11
XX	—	10	—	$10\frac{7}{10}$	XV	—	$12\frac{3}{4}$
—	—	—	—	—	XX	—	$14\frac{3}{4}$
—	—	—	—	—	XXX	—	$15\frac{1}{4}$
XXXX	—	$12\frac{1}{2}$	—	$13\frac{5}{10}$	—	—	—
—	—	—	—	—	L	—	$19\frac{3}{4}$
LX	—	13	—	$15\frac{5}{10}$	LX, ou un talent	—	21
LXXX	—	15	1,	$\frac{1}{10}$	—	—	—
CXX	1,	$1\frac{1}{2}$	1,	$3\frac{5}{10}$	—	—	—
CLX	2,	—	1,	$5\frac{5}{10}$	II Talent	1,	9
CLXXX	2,	5	1,	$6\frac{4}{10}$	III Talent	1,	11
CC	2,	6	1,	$7\frac{2}{10}$	—	—	—
CCX	2,	7	1,	$7\frac{9}{10}$	—	—	—
CCL	2,	8	1,	9	—	—	—

Quatre livres Romaines pesent autant que trois livres d'Allemagne. Ainsi, prenez un boulet de pierre de trois livres d'Allemagne, & divisez son diametre en $6\frac{2}{10}$; vous aurez la longueur de $6\frac{2}{10}$ pouces du pied Romain, dont seize font un pied entier. On peut outre cela inférer de là que le pied Romain étoit de $\frac{2}{10}$ de pouce plus court que le pied de Nuremberg, & qu'il étoit égal à celui de Magdebourg.

Mais revenons à notre sujet. Je ne saurois assez m'étonner que ces illustres Architectes, dont l'un déclare qu'il propose ce dont l'ex-

l'expérience l'a instruit d'une maniere certaine, & l'autre aspire avec tant d'ardeur dans son ouvrage au titre de réformateur de l'art balistique, ayent erré grossierement dans la premiere notion qui doit servir de fondement à tout le reste. A present on demandera ce que nous avons à faire; s'il faut s'en rapporter à ces guides infideles, ou chercher à se frayer quelque nouvelle route au moyen de l'Artillerie moderne? Avant que de rien statuer de positif, je rechercherai la vraye proportion du diametre du trou à la masse du boulet, en recourant à des principes geométriques.

Comme l'Art de la Guerre exige que les traits mortels frappent l'ennemi d'aussi loin qu'il est possible; donnons à tous les boulets lancés par les balistes une vitesse égale, en sorte qu'après la décharge ils aillent tomber au pied du même but. On demande quel doit être le volume des cordes pour l'exécution de ce jet?

Personne n'ignore que l'*impetus* est le produit du quarré de la vitesse par la masse; & qu'avec la même vitesse, l'*impetus* de différens corps est en raison directe de la masse de chacun d'eux. Posons la masse du boulet $= M$, celle du plus petit $= m$. Que la vitesse de chacun soit $= C$, le diametre du plus grand $= D$, du plus petit $= d$, l'*impetus* du premier $= I$, du second $= i$.

Cela fait, $\underline{MC^2 : mC^2 = I : i}$

$\overline{M : m = I : i}$, mais aussi $M : m = D^3 : d^3$.

De là $\overline{I : i = D^3 : d^3}$.

Donc $\overline{\sqrt[3]{I} : \sqrt[3]{i} = D : d}$.

C'est pourquoi le diametre du boulet doit regler celui des barillets qui environnent & contiennent le volume des cordes.

TEXTE DE VITRUVE.

Peritreton. §. 22. *Quum ergo foraminis magnitudo fuerit instituta, describitur scutula, quae Graece περίτρητον appellatur, cujus longitudo foraminum*

minum ΠF z, *latitudo duo & sextæ partis. Dividatur dimidium lineæ descriptæ, & quum divisum erit, contrahantur extremæ partes ejus formæ ut obliquam deformationem habeant; longitudinis sexta parte, latitudinis ubi est versura, quarta parte. In qua parte autem est curvatura, in quibus procurrunt cacumina angulorum, & foramina convertuntur, & contractura latitudinis, redeant introrsus sexta parte. Foramen autem oblongius sit tanto quantam epizygis habet crassitudinem. Quum deformatum fuerit, circumcidatur* (on lit aussi *circumdividatur*,) *extremam ut habeat curvaturam molliter circumactam. Crassitudo ejus foraminis* SΓ. (peut-être qu'il faut lire S3.)

TRADUCTION DE M. PERRAULT.

Après avoir réglé la grandeur de ce trou, qui est appellé en Grec *peritretos*, il faut chercher les proportions du *gros rouleau*. Sa longueur doit être de deux diametres du trou avec une douzieme & une huitieme partie de ce diametre; sa largeur, de deux diametres & un sixieme; mais il faut diviser la moitié de la ligne qui a été décrite, & après cela resserrer son extrémité en telle sorte qu'étant tournée obliquement, elle ait de longueur une sixieme partie, & un quart de largeur vers l'endroit où elle commence à tourner, & un sixieme à l'endroit où est la plus grande courbure, qui est où les points des angles se rencontrent, & les trous & le rétrécissement de la largeur tendent. Ce trou doit être un peu plus long que large, & proportionné à l'épaisseur de l'*Epizygis:* après en avoir tracé la circonférence, il en faut polir l'extrémité en la courbant doucement. Son épaisseur est d'un diametre & un sixieme.

On appelle *peritreton* une planche de bois avec un large trou au milieu, dans lequel on inséroit un barillet de cuivre qui contenoit le volume des cordes. La figure que Vitruve attribue au peritrete, est la même que les Grecs lui donnent. Philon à la vérité, pour corriger cette piece, s'écarte un peu de l'usage, & change le péritrete en un architrave. Mais cela n'intéresse pas notre sujet.

 Soit

Planche IX. Fig. 1.

Soit la longueur du péritrete ab = II,
sa largeur ac = II$\frac{1}{8}$.

Qu'on divise ac & bf par le milieu en d & en e, & qu'on coupe les quatre angles par une ligne comme gkh, de façon que ah soit un sixieme, ag un quart, & que le sommet k rentre depuis le point a de la longueur ak qui soit un sixieme.

Son épaisseur = $\frac{1}{8}$. Les Grecs prescrivent = I. Je m'en rapporterois plutôt à eux, vû que le péritrete me paroit trop foible: son épaisseur est moindre qu'un diametre. Les péritretes des grandes balistes étoient revêtus de lames & de regles de fer, qui suffisoient pour soutenir le violent effort des cordes.

Planche IX. Fig 2. Fig. 3.

L'*epizygis* étoit une piece de fer oblongue, qui soutenoit sur son dos arrondi les cordes tendues, étant inséré dans le creux des barillets. Suivant Philon, son épaisseur ab = $\frac{1}{4}$, & sa largeur ad = au double de l'épaisseur = $\frac{2}{4}$ de diametre. Le trou oblong, proportionné à l'épaisseur de l'épizygis, dont parle le texte, doit plutôt être entendu d'un trou dans les barillets que dans le péritrete; d'autant que le virement des barillets exige un trou rond dans le péritrete.

TEXTE DE VITRUVE.

Modiolus.

§. 23. *Constituantur modioli foraminum II* =— *latitudo Is* ∻ ⁝ ⁝ *crassitudo præterquam quod in foramine inditur foraminis* S =— *ad extremum autem latitudo foraminis* IΓ. (ou plutôt I =—.)

TRADUCTION DE M. PERRAULT.

Il faut que les barillets ayent onze huitiemes de diametre: leur largeur doit être d'un diametre & trois quarts: leur épaisseur d'un demi-diametre, sans ce qui se met dans le trou; & leur largeur par l'extrémité doit être d'un diametre & un sixieme.

Le barillet, en Grec χοινικὶς, est un cylindre creusé, qui soutient non seulement les cordes par l'épizygis, mais qui sert aussi à les faire

faire tourner. Les barillets des balistes médiocres étoient de cuivre;
ceux des grandes, au témoignage de Héron, d'un bois très dur, ar-
mé de toutes parts de fer; & l'on travailloit ces pieces avec beaucoup
de soin. La longueur du barillet, ou plutôt sa hauteur *ab* $= 11\frac{1}{4}$; Planche IX.
la plûpart des Grecs ne lui donnoient que la longueur de deux diame- Fig. 3.
tres. La largeur, ou le diametre, qui comprend en même tems l'é-
paisseur du cuivre, *cd*, $= 1\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ d'once. Ici le barillet prenoit Fig. 4.
une figure sexangulaire, afin qu'on pût le tourner avec une clef de Fig. 9.
fer; mais, de peur que le barillet ainsi tourné ne reprit par l'effort des
cordes sa premiere situation, il faloit ajouter une roue à dents qu'un
cliquet arrêtoit. Les Allemands appellent ce méchanisme Ein Sperr-
rad nebst Sperr-Kegel und Sperr-Feder. Pour cette partie du baril-
let, qui doit entrer dans le trou du péritrete, & dont la longueur *cb*
est $= \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$, Vitruve la décrit d'une maniere assez obscure par Fig. 3.
les termes suivans: *Crassitudo præterquam quod in foramine inditur.*
Cette partie est plus mince que les autres, puisque notre Auteur n'ac-
corde à son diametre que $1\frac{1}{3}$. Héron qui l'appelle le tenon du baril-
let, dit: *καταλείπονται ἐκ τῆς κάτα πλεύρας κύκλῳ τόρμοι ὁποῖοι
— πρὸς τὸ μὴ παραβαίνειν τὴν χοίνικα τόπον ἐκ τόπȣ.*

La partie supremè du barillet *an*, présente de nouveau une Planche IX.
figure ronde, dont j'ai entaillé les côtés en *n* & en *o*, pour y insérer Fig. 5.
l'épizygis, en ajoutant les deux vis *x* & *y*, au moyen desquels tout
le systeme des cordes peut être tendu avec le plus grand effort. J'en
traiterai plus au long quand il sera question des *entonia*.

Enfin, je ne crois pas qu'il faille omettre qu'on doit mettre sous le barillet, autour du trou du peritrete, un anneau de fer (ὑπόθεμα) qui avance un peu hors du plan du péritrete afin de diminuer la friction du barillet. Cette friction est si grande, que les coups les plus véhémens des bras ne sauroient ramener par leur choc le barillet une fois tourné à sa situation précédente, quoique le barillet ne soit pas garni d'une roue à dents. C'est ce dont j'ai été instruit dans la suite par l'expérience.

 TEX-

TEXTE DE VITRUVE

Parastatae. §. 24. *Parastatarum longitudo foraminum V s Γ, curvatura foraminis pars dimidia, crassitudo foraminis* ii *& partis IX. Adjicitur autem ad mediam latitudinem, quantum est prope foramen factum in descriptione latitudine & crassitudine foraminis V altitudo parte IIII.*

TRADUCTION DE M. PERRAULT.

Le poteaux auront de longueur cinq diametres & demi, & un seizieme; de tour, un demi-diametre; d'épaisseur un tiers & un neuvieme de diametre. Il faut ajouter à la moitié de leur largeur autant que l'on a fait auprès du trou, lorsque l'on en a tracé la largeur & l'épaisseur, savoir cinq diametres, & leur donner un quart de diametre de hauteur.

Chaque *hemitonium* s'étendoit sur deux soutiens, dont l'un recevoit dans sa courbure le bras, c'étoit le *parastata*; & dans le chelonium de l'autre reposoit la pterna du bras: c'étoit l'*antistata*. Voyez le premier Fig. 6. & le second Fig. 7. Planches VII. & VIII.

Philon guidé par l'expérience donne aux cordes la longueur de neuf diametres. Tirons présentement Vitruve en cause, & après avoir réuni ses proportions en une somme, voyons de combien elles s'écartent de cette regle.

La longeur du parastate	= V $\frac{1}{2}$ + $\frac{1}{3}$
L'épaisseur des deux péritretes	= I $\frac{2}{3}$
l'élevation des deux barillets au dessus du péritrete, après avoir soustrait la largeur des épizygides.	= II $\frac{1}{4}$
	Total VIIII $\frac{3}{4}$

Il a donc erré en défaut d'environ $\frac{3}{4}$.

Mais Philon ne mérite pas moins correction pour avoir violé sa propre loi.

Selon

Selon lui

la longueur du paraſtate	=	V$\frac{1}{2}$
— — des deux péritretes	=	II
— — des deux ὑποθεμάτα	=	— $\frac{1}{2}$
la hauteur des barillets	=	I$\frac{1}{2}$
	Total	VIIII$\frac{1}{2}$

Ainſi Philon doit être auſſi redreſſé. Mais, pour l'inconvénient à craindre de la trop-grande longueur des cordes, il eſt facile de le prévenir en les tendant plus fort.

L'épaiſſeur du paraſtate de Vitruve = $\frac{1}{5}$ + $\frac{1}{8}$, celle du paraſtate de Philon = $\frac{1}{2}$ + $\frac{1}{6}$ + $\frac{1}{16}$. Ici l'autorité de Philon doit entierement prévaloir, le paraſtate de Vitruve me paroiſſant trop fragile.

Voici comment j'explique le paſſage ſuivant: *Adjicitur autem ad mediam latitudinem quantum eſt prope foramen factum in deſcriptione foraminis quinta, altitudo parte quarta.* Au milieu du paraſtate il y a une courbure entaillée où eſt poſé le bras: afin donc que le paraſtate ne ſoit pas trop affoibli par cette entaille, il doit y avoir derriere une boſſe qui excede la largeur du paraſtate, & cela de façon que le milieu de ce bois ſoit plus large que les extrémités qui touchent aux péritretes, de la cinquieme partie d'un diametre. Cette largeur augmentée doit aller de part & d'autre à la quatrieme partie d'un diametre, jusqu'à ce qu'inſenſiblement elle ſe réuniſſe avec le reſte du dos. Ainſi la plus grande force des paraſtates doit être au milieu vers la courbure. Planche IX. Fig. 6.

Les Grecs donnoient le nom d'*Hemitonium* au plinthe conſtruit au moyen des deux péritretes, ſoutenus & du paraſtate & de l'antiſtate. Ainſi l'on pourroit définir le *Palintonium*, ou la baliſte, une machine compoſée de deux *Hemitonia.* Les baliſtes différent par conſéquent des catapultes, qui contiennent dans un même péritrete deux volumes de cordes. Elles différent auſſi des Onagres, qui n'ont pareillement qu'un *Hemitonium*, quoiqu'ils lancent les plus groſſes pierres Planche IX. Fig 5.

res avec une force étonnante. Au reste la figure 8 montre la lame de fer qui doit être placée entre le péritrete & les parastates. Le lévier qui sert à faire tourner les vis, est exprimé par la Figure 9.

TEXTE DE VITRUVE.

Mensa. §. 25. *Regulæ, quæ est in mensa, longitudo foraminum octo, latitudo & crassitudo dimidium foraminis. Cardines* II z ∴ *crassitudo foraminis* 199 ∴ *curvatura regulæ* FsK, *exterioris regulæ latitudo & crassitudo tantundem; longitudo, quam dederit ipsa mensura deformationis & parastatæ latitudo & suam curvaturam* K; *superiores autem regulæ æquales erunt inferioribus* K. *Mensæ transversarii foraminis* ii ii K.

TRADUCTION DE M. PERRAULT.

La regle qui est à la table doit avoir huit diametres de long, sa largeur & son épaisseur doit être d'un demi-diametre, l'épaisseur du tenon de deux diametres & un huitieme; la courbure de la regle d'un seizieme & cinq quarts de seizieme: la largeur & l'épaisseur de la regle exterieure doit-être pareille. La longueur que donnera sa courbure, avec la largeur du poteau & sa courbure, sera d'un quart de diametre. Mais il faudra que les regles supérieures soyent égales aux inférieures. Les travers de la table seront de deux tiers & un douzieme de diametre.

De quelque pénétration qu'on soit doué, il n'y a pas moyen de deviner le sens de ces paroles, qui ne semblent pas écrites avec quelque dessein, mais plutôt jettées au hazard. Vitruve a voulu décrire la table des Palintones, laquelle n'a ni ne sauroit avoir lieu à l'égard des Euthytones; mais, après nous avoir conduit dans les plus sombres antiquités, ce guide se dérobe, & nous laisse tâtonnans au milieu des ténebres. Mais ce qui me comble de joye, c'est que le bon & fidele Héron vient ici à notre secours, & nous prête son flambeau. Plaçons ici la description de cette table, telle qu'il nous la fournit.

„Suppo-

„Supposez, dit-il, deux Hemitonia, rangés & placés, comme „il a été dit, sur quelques solives qui sont distantes l'une de l'autre un „peu moins du double de l'un des deux bras. Soient donc les péritre-„tes inférieurs des Hemitonia αβγδεξηθ, garnis de tenons qui en „sortent κλμνξοπρ, arrêtés par quelques regles στυψ, qui ont auſ-„si leurs tenons. Ce qui a été dit des péritretes inferieurs, doit s'enten-„dre également des péritretes supérieurs. De plus, les solives inférieures „sont jointes ensemble par plusieurs traverses (*diapegmatibus*) telles que „χψως. C'est sur ces traverses mêmes qu'est posée la planche, qui rem-„plit exactement tout l'espace entre les solives. Tout assemblage de pie-„ces que forment les solives & la planche, est appellé *Mensa*, la table.“ Planche X. Fig. 2.

L'épaisseur des ténebres où nous étions plongés, tire beaucoup de jour de ce précieux morceau de l'Antiquité; & nous n'aurons pas une grande peine à donner présentement le dessein d'une table balistique.

On voit d'abord les deux solives inférieures στυψ avec leurs traverses χψως, qu'il faut faire un peu plus basses, afin que la planche, épaisse d'un $\frac{1}{8}$ (selon Philon) & représentée dans la 3 Fig. entre exactement entre les solives. Ces traverses sont sans doute ce que Vitruve appelle *transversarii*, & fait = *ii ii*. Par rapport aux solives supérieures, elles reçoivent au milieu une courbure = F*s*, de peur que quelque pierre jettée à faux, en heurtant le haut, ne les brise. La longueur de ces quatre solives doit nécessairement être égale, tant à la table (*mensa*) qu'à la largeur des hemitonia & des parastates. C'est à cela qu'il faut rapporter les paroles du Texte: *longitudo quam dederit ipsa mensura deformationis & parastatæ latitudo.* Elles avoient des tenons, afin de recevoir plus sûrement les hemitonia. Au reste, si l'on doutoit que j'eusse bien placé la courbure des regles supérieures, je produirois pour garant la Colomne Trajane, où, dans la tranchée defendue par les Romains, contre les Daces, si je ne me trompe, aussi bien que sur les murs que l'artiste de la colomne représente assez bien, on voit l'image d'une baliste, dont j'ai donné le dessein Fig. 6. & dans laquelle les regles supérieures ont une courbure.

Planche X. Fig. 2.

Fig. 1.

Quand

Quand je lisois & j'expliquois autrefois les Antiquités Romaines à Closter-bergen, j'étois toujours obligé d'avouer que j'ignorois ce que représentoit cette figure tout à fait singuliere de la Colonne Trajane. Mais, depuis que ma baliste a pris, pour ainsi dire, d'elle-même cette forme, je n'ai conservé aucun doute d'avoir retrouvé la vraye structure de cette terrible Machine poliorcetique *).

L'usage de la solive placée dans la table, est indiqué par la Fig. 4. *m n*, & par la Fig. 5. *n*. Cette solive se posoit sur la planche de la table, pour affermir les deux fusts du milieu du *Climacis*.

Les tenons ═ I I z ne sauroient être ceux de la solive mensale; & l'on ne peut même imaginer de supposition plus absurde: mais ce sont les chelonia attachés sous la table, au moyen desquels la baliste, posée sur son support, étoit élevée ou inclinée, suivant l'exigence du cas.

TEXTE DE VITRUVE.

Climacis. §. 26. *Climaciclos scapi longitudo foraminum* XIII ⁝ ⁝ ⁝ *crassitudo* III K.

TRADUCTION DE M. PERRAULT.

Le fust du *Climacis* doit être long de treize neuviemes de diametre, & épais de trois quarts.

Le mot *climaciclos* est une grossiere erreur des Editeurs de Vitruve; car les Grecs appellent cette piece κλίμακις, parce que ses fusts, attachés ensemble par plusieurs traverses, représentoient une espece d'échelle: ainsi il faut lire *climacidos*, & non *climaciclos*. Le climacis étoit destiné, en partie à lier le canal par lequel on conduisoit la diostre avec la table, en partie à soutenir les solives supérieures, & aussi à affermir les péritretes, de peur que, par l'effort d'une violente attraction, les regles mensales étant courbées, les zones ne vinssent à se briser. Cette description répond exactement à l'explication de Héron

*) La figure de la baliste dans la Colomne Trajane représente la table (*mensam*) avec les deux hemitonia garnis d'une couverture contre les injures de l'air; on y voit de plus la diostre tendue, & la colomne soutenue de trois liens (*capreolis*).

Héron qui dit: „Au reste le syrinx, auquel la dioſtre eſt attachée, A, le chelonium B, & la main C, dans les Euthytones porte „à la vérité le nom de ſyrinx, mais on l'appelle climacis dans les Palintones, parce qu'il a plus de largeur, & parce qu'il a un plus grand „nombre de traverſes, comme la table même.“ Planche X. Fig. 5.

J'ajouterai ici le reſte de la deſcription du climacis par Héron, ſuivant le Texte Grec; car la Verſion Latine ne me paroit pas ici en avoir aſſez bien ſaiſi le ſens.

Γίνεται γὰρ ἡ κλίμακις οὕτως. Διάπηγμα κατασκευάζεται ἐκ τεσσάρων κανόνων συνεστηκός. La Fig. 4. AB, CD montre les deux inférieures, & Fig. 5. EF la place des deux ſupérieures. Et la choſe elle-même demande que les quatre ſolives du climacis ſoyent ainſi arrangées. En effet, après avoir ôté les deux ſupérieures, on chercheroit inutilement une place pour ſoutenir les péritretes ſupérieurs par des arcboutans, dont l'affermiſſement eſt pourtant très néceſſaire, pour ne pas parler de pluſieurs autres avantages qui en réſultent. Héron continue:

Ἐπὶ τὸ μέσον ἔχον κατὰ τὸ πλάτος ἄλλας κανόνας πεπηγότας ἐπὶ τῶν κατὰ τὸ μῆκος κανόνων κλίμακις.

Il parle des traverſes du climacis.

Ἐπάνω γὰρ κατὰ τὸ μῆκος κανόνων, τουτέστι τῶν διαπηγμάτων, κανόνια β ἐπιτίθεται ἰσομήκη τῇ κλιμακίδι παρὰ τὰ σκέλη αὐτῆς. Ταπεινότερα γὰρ τῶν σκελῶν τῆς κλιμακίδος, ἐφ' ἃ ἡ διόστρα κινεῖται.

Vous voyez ces deux fuſts poſés ſur les traverſes, Fig. GH & IK. On les place ainſi parce que les fuſts collatéraux ſont trop bas, pour que la dioſtre puiſſe y être conduite commodément. La pierre poſée ſur la dioſtre demande une ſituation rélativement aux bras, par laquelle la zone vibrante puiſſe la frapper diamétralement; ſituation qu'elle n'auroit pas, ſi la dioſtre n'étoit élevée au deſſus de la baſe du climacis par le moyen des fuſts intermédiaires. C'eſt pour-

 quoi

quoi je pense que les mots de la derniere période doivent être rangés de la maniere suivante; σκέλη τῆς κλιμακίδος ταπεινότερα ἐστὶ τῶν στηλῶν, c'est à dire, ceux du milieu ἐφ' ἃ ἡ διόςρα κινεῖται, ἔχοντα τὸ πλάτος ἴσον τῷ διαστήματι τῆς κλιμακίδος, c'est à dire, que la dioſtre a une largeur égale à la diſtance des fuſts du milieu, que Philon détermine à $1\frac{1}{4}$ de diametre. Par l'épaiſſeur du climacis = III diametres, Vitruve n'a voulu faire entendre autre choſe que la ligne *ab* Fig. 5. ou la diſtance depuis le haut de la ſurface de la dioſtre juſqu'au bas de la baſe du climacis.

TEXTE DE VITRUVE.

Crena climacidos.

§. 27. *Intervallum medium latitudo foraminis ex parte quarta* ⁝ *craſſitudo pars octava* K.

TRADUCTION DE M. PERRAULT.

L'intervalle du milieu doit être large d'un diametre & un quart, & épais d'un huitieme & un quart de huitieme.

Cet intervalle du milieu ne quadre nulle part à moins qu'on ne l'entende des rainures dans l'un & l'autre des deux fuſts, dans leſquelles gliſſoit la dioſtre moyennant ſes languettes (πτερυγόματα). On diroit en Allemand: Die Nuthe, in welcher die Zapfen der Kugelrinnen laufen, bekommt zur Breite $\frac{1}{4}$, zur Tiefe $\frac{1}{8}$.

TEXTE DE VITRUVE.

Chelon.

§. 28. *Climacidos ſuperioris pars, quæ eſt proxima brachiis, quæ conjuncta eſt menſæ, tota longitudine dividitur in partes quinque: ex his dantur duæ partes ei membro, quod Græci* χηλὸν *vocant.*

TRADUCTION DE M. PERRAULT.

Toute la longueur de la partie du climacis ſupérieur qui eſt proche des bras, & jointe à la table, ſe doit diviſer en cinq parties, dont deux ſeront données à la partie appellée *Chelone*.

Par

Par la partie supérieure du climacis, qui est la plus voisine des bras, & qui tient à la table, Vitruve, si je ne me trompe, entend la surface supérieure des fusts du milieu, laquelle, à cause de son élevation, est le plus près des bras, & touche presque la corde: cette partie du climacis pose sur les solives de la table, & par conséquent est liée à la table. La longueur de ces fusts égale à celle de la diostre = XIII, seroit suffisante, s'il ne faloit attacher au bout ou à la queue le chelonium où est renfermé le moulinet qui tire la diostre. Pour trouver cet allongement essentiel des fusts, il faut diviser la longueur de la diostre = 13 par 5, & l'on aura 2 3/5. Ce nombre étant doublé donne 5 1/5, laquelle longueur ajoutée à 13, c'est à dire à la longueur de la diostre, produit la longueur entiere des fusts du climacis, à l'extrémité desquels on peut placer la figure de cette piece que les Grecs appellent χηλὸν, ou mieux χελόνιον. Ainsi toute la longueur du climacis sera = 18 1/5 diametres. C'est par tous ces détours que Vitruve enseigne une chose que Philon met dans un jour suffisant en trois mots, *longitudo climacidos esto XVIII diametrorum.*

TEXTE DE VITRUVE.

§. 29. *Latitudo* (scilicet chelonii) Γ(=—), *crassitudo* Ϡ, *longitudo foraminum III & semis, extantia cheles foraminis* S. *Pterygomatos foraminis* ꝛ *& sicilicus.* **Manucla.**

TRADUCTION DE M. PERRAULT.

Elle (*la Chelone*) sera large d'un quart de diametre, épaisse d'un seizieme, & large de trois diametres & demi & un huitieme: les parties qui s'avancent hors du *Chelo*, auront un demi-diametre: la saillie du *Pterigoma* sera de la douzieme partie d'un diametre & d'un sicilique.

Que Vitruve change ici d'objet, & qu'au lieu de parler du chelonium sur lequel est placé le moulinet, il parle de celui de la *manucla*, posée sur la diostre; c'est ce qui paroit non seulement d'une ma-

maniere évidente par la defcription même, mais auffi par le texte, dans lequel, un peu plus bas, il eſt fait une mention féparée du chelonium du moulinet. De plus, il faut remarquer que notre Auteur rapporte feulement les mefures de la manucle, ou χεὶρ. Conférez avec ceci le §. 11.

Ainfi la largeur de la manucle eſt $= \frac{1}{3}$,
l'épaiffeur $= \frac{1}{9}$,
la longueur $=$ III $\frac{1}{2}$.

Toute cette piece étoit de fer. Par les mots *extantiam cheles* = S, Vitruve entend peut-être la hauteur du trou du chelonium (*x* Fig. 5.) au deffus de la furface de la dioſtre; hauteur qu'il eſt tout à fait néceffaire de déterminer, parce que la corde des bras qui étoit tiffue en forme de ceinture, & avoit un anneau dans lequel le doit recourbé de la manucle entroit, étoit à la diſtance d'un demi-diametre de la furface de la dioſtre.

Au lieu de *Pterygomatos*, on lit dans l'édition de Lyon, *Plintigonatos*, qui n'a aucun fens dans toute la Langue Grecque. Mais que faut-il entendre par le Pterigoma? Il peut défigner trois chofes, & d'abord la détente ou *ſchaſteria* qui arrête le crochet où tient la corde dont il a été parlé au §. 11. mais alors il faut rejetter les mefures ζ & *ſicilicus*, parce que cette piece étoit plus longue. Ou bien le *Pterygoma* fignifie les ailes ou languettes de la dioſtre, dont Philon parle ainfi: *ποιεῖν δὲ καὶ τὰ πτερύγια, δι' ὧν τὸ χέλονιον* (Philon par fynecdoche met fouvent *χελόνιον* au lieu de *διώςρα*,) *ἄγεται μῆκος μὲν. ἔχοντα τὸ ἴσον τῇ κλιμακίδι, πλάτος δὲ διαμέτρυ τέταρτον μέρος, πάχος δὲ ὀγδόον μέρος.* De cette maniere Vitruve s'accorderoit affez exactement avec Philon, & le caractere ζ exprimeroit la largeur, le *ſicilicus* l'épaiffeur du pterygoma. Ou enfin ce pterygoma indique certaines ailes placées aux côtés de la dioſtre, auxquelles on attachoit les cordes du moulinet pour tirer la dioſtre. Cette derniere interprétation me paroit la plus fatisfaifante, vû qu'il a été déjà parlé §. 26. des ailes de la dioſtre (Falzen) mais j'en abandonne la décifion au lecteur.

Quel-

Quelque parti que l'on prenne, il ne sauroit arriver un grand préjudice à la Machine du défaut d'intelligence de ce passage.

TEXTE DE VITRUVE.

§. 30. *Quod est autem ad axona, quod appellatur frons transversarius foraminum trium* ⁝ ⁝ *interiorum regularum foraminis crassitudo* ς K *cheloni replum, quod est operimentum securiculæ includitur* K. Sucula chelonium.

TRADUCTION DE M. PERRAULT.

Mais ce qui est vers l'essieu qui est appellé *frons transversarius*, doit être long de trois diametres & un neuvieme, & les regles de dedans doivent être longues d'un neuvieme, & épaisses d'un douzieme & un quart de douzieme. Le rebord du chelo qui sert de couverture à la queue d'hirondelle, doit être long d'un quart de diametre.

Les Grecs appellent le moulinet ἀξόνιαν; ainsi les mots, *quod est ad axona*, designent le chelonium qu'on attache à la queue de la baliste & de son climacis par les fusts du milieu, pour y insérer le moulinet. Vitruve nomme ce côté de la baliste *frontem transversariam*, il y a dans le texte *transversarium* contre la Grammaire. Je ne saurois dire par quelle raison, bonne ou mauvaise, il a plu à l'Auteur d'appeller cette partie de la machine *frontem transversariam.*

Quand aux solives inférieures, savoir celles du climacis, Fig. 4. *e, f, g, h*, dont l'une étoit placée sous le chelonium, il en faloit au moins quatre. Philon donne à ces traverses une largeur $= \frac{1}{3}$ & une épaisseur $= \frac{1}{6}$. Vitruve assigne pour l'épaisseur $\frac{1}{4}$, ce qui convient mieux à la force du climacis.

Le fermant du chelo, B, *) qui environne le cou du moulinet élevé d'un demi-diametre au dessus du chelonium, étoit de fer, & s'engageoit en *o* à un crochet. Nos Ingénieurs se servent d'un semblable moyen pour garnir & affermir les tourillons des canons de bron- Planche X. Fig. 5.

 ze,

*) Voyez Planche VII. Fig. 7. *f, g, h*,

ze, afin d'empêcher qu'ils ne s'écartent de leurs affûts, par la force des coups, lorsqu'on tire.

TEXTE DE VITRUVE.

Scapi collaterales. §. 31. *Scapos climacidos latitudo* Z *s*, *crassitudo foraminum* XII K.

TRADUCTION DE M. PERRAULT.

La largeur des montans du climakis doit être d'un huitieme, & la grosseur d'un douzieme & un quart de douzieme.

Enfin notre Auteur rentre dans son sujet, pour désigner d'une maniere assez superficielle les dimensions des solives, non du milieu, mais des côtés, qu'il avoit jusqu'ici négligées. Mais quelle étrange épaisseur ne leur donne-t-il pas? Il la pousse à XII diametres; pour faire de pareilles pieces on chercheroit vainement dans tout l'Univers des arbres qui fussent assez gros. Cet endroit a donc besoin d'être corrigé. Ecoutons Philon qui indique les proportions suivantes. „Que les solives du climakis, dit-il, ayent la largeur = 1 diametre, „l'épaisseur = $\frac{1}{4}$ & la longueur de XVIIII diametres."

TEXTE DE VITRUVE.

Sucula. §. 32. *Crassitudo quadrati quod est ad climacida foraminis* F *s in extremis* K, *rotundi autem axis diametros æqualiter erit cheles.*

TRADUCTION DE M. PERRAULT.

L'épaisseur du quarré qui est au climakis doit être d'un douzième & d'une huitieme partie de douzieme, & vers l'extrémité d'un quart de douzieme; mais le diametre de l'essieu rond sera égal au chelo.

Vitruve décrit le moulinet dont les deux têtes, ou extrémités, étoient quarrées & percées de trous, par lesquels passoient les barres ou leviers à plusieurs bras, pour tourner le moulinet. Le col du

du moulinet placé dans le chelonium étoit nécessairement rond & égal au chelo, ou à l'entaille demi-circulaire du chelonium. C'est bien dommage que Vitruve se soit borné à parler si legerement, & comme en passant, de ces pieces, dont la structure est de la plus grande importance, tandis qu'ailleurs il s'appésantit sur des minuties.

TEXTE DE VITRUVE.

§. 33. *Ad claviculos autem* S *minus parte sexta decuma* K. *Clavicule.*

TRADUCTION DE M. PERRAULT.

Vers les clavicules il sera plus petit de la moitié & d'une seizieme partie.

Les fusts du milieu étoient garnis, de deux lames dentelées, & la diostre avoit de chaque côté des clavicules ou cliquets à ressort, qui, en rencontrant les dents de ces lames, empêchoient le recul de la diostre, afin que les soldats qui tournoient le moulinet avec des leviers, ne fussent pas en danger de la vie, tandis qu'ils s'occupoient d'un travail si propre à épuiser toutes leurs forces.

TEXTE DE VITRUVE.

§. 34. *Anteridion longitudo foraminum* III 𝔖, *latitudo in imo foraminis* Γ : : *in summo crassitudo* ZK. *Anterida.*

TRADUCTION DE M. PERRAUT.

La longueur des arcboutans sera d'une douzieme partie & de trois quarts de douzieme. La largeur en bas d'une treizieme partie de diametre; l'épaisseur au haut d'une huitieme & d'un quart de huitieme.

Les Hemitonia ont besoin de liens, *pq*, comme le témoigne Héron, & de leurs bouts l'un est inséré au climacis, l'autre au péritrete. Il y avoit donc quatre liens, deux qui s'appuyoient contre les péritretes supérieurs, & deux contre les inférieurs. Voyez le §. 26. Ce paragraphe montre en même tems que nous n'avons point commis d'er- Planche X. Fig. 4.

d'erreur en donnant la largeur du climakis; car, si l'on faisoit sa table plus étroite, des arcboutans de trois diametres de longueur ne suffiroient pas pour soutenir les péritretes. Il ne reste donc aucun doute que le climakis n'ait eu autant de largeur que la table de longueur.

TEXTE DE VITRUVE.

Basis & columna.

§. 35. *Basis, quæ appellatur Eschara, longitudo foraminum* ⋮⋮ *antebasis foraminum* ⋮⋮ *utriusque & latitudo foraminis* ⋮⋮ *Compingitur autem dimidia altitudinis K colomna, latitudo & crassitudo* I s, *altitudo autem non habet foraminis proportionem, sed erit quod opus erit ad usum.*

TRADUCTION DE M. PERRAULT.

La base qui est appellée *Eschara*, aura de longueur une neuvieme partie de diametre. La piece qui est au devant de la base, aura quatre diametres & un neuvieme de diametre. L'épaisseur & la largeur de l'une & de l'autre sera d'un neuvieme de diametre. La demi-colomne aura de hauteur un quart de diametre, & de largeur & d'épaisseur un demi-diametre: pour ce qui est de sa hauteur, il n'est point nécessaire qu'elle soit proportionnée au diametre, mais à l'usage auquel elle est destinée.

Ἐσχαρὰ n'est autre chose qu'une claye placée sous le montant ou l'arbre qui portoit la tête de la baliste. Vitruve a omis sa longueur. Puisque la piece qui est au devant de la base doit être = IIII diametres, la longueur de la base sera = VIII, en supposant que l'*Eschara* ait eu trois pieds, ou jambes. La largeur & l'épaisseur de l'une & de l'autre suffiront pour fortifier le montant, si on lui donne un diametre. Au milieu de l'*Eschara* s'éleve l'arbre ou le montant qui porte sur son sommet la baliste monstrueuse, & qui tient à la base par ses trois liens. Vitruve s'en remet à l'usage pour la hauteur de cet arbre négligence vrayement impardonnable, puisqu'il devoit savoir que l'angle sous lequel les boulets partent, détermine l'espace parcouru

par

par le corps lancé, & que la colomne doit être considérée comme la tangente de cet angle. En cela il en est parfaitement des balistes, comme de nos mortiers aujourd'hui.

TEXTE DE VITRUVE.

§. 36. *Brachii longitudo foraminum VI ⁝⁝⁝ crassitudo in radice foraminis, in extremis* F. Brachium.

TRADUCTION DE M. PERRAULT.

Sa longueur sera de six neuviemes de diametre; son épaisseur, vers le bas, d'un demi-diametre; & à son extrémité, du douzieme d'un diametre.

Les bras des balistes étoient plus courts que ceux des catapultes, §. 14. Nous n'avons aucun lieu de douter que les Anciens ne fussent parvenus à la connoissance de cette regle par un long usage, quoiqu'il soit très difficile de découvrir la raison de cette différence. A' mon avis les boulers ont plus de disposition à recevoir la derniere vitesse des bras, & par conséquent aussi les cordes, que les dards, qui ne reçoivent que successivement la force qui agit sur eux, & n'acquierent que peu à peu le degré de vitesse desiré. J'ai fait là dessus plusieurs expériences qui constatent la chose. Or, plus les bras sont longs, plus l'espace par lequel la corde accompagne la flêche qui part, est aussi long; & voilà pourquoi il faloit aux catapultes des bras plus allongés.

TEXTE DE VITRUVE.

§. 37. *De balistis & catapultis symmetrias, quas maxima expeditas putavi, exposui. Quemadmodum autem contentionibus eæ temperentur, e nervo capilloque tortis rudentibus, quantum comprehendere scriptis potero, non prætermittam.* Epilogus.

TRADUCTION DE M. PERRAULT.

Après avoir donné les proportions des baliſtes & des catapultes que j'ai jugées les plus convenables, je veux expliquer le plus clairement que je pourrai comment il faut régler leur bandage, qui ſe fait avec des cordes de boyau ou de cheveux.

C'eſt à dire qu'il s'engage à mettre dans ce qui ſuit la même obſcurité & la même briéveté avec lesquelles il a donné jusqu'ici une deſcription auſſi confuſe qu'imparfaite des plus admirables machines que l'ingénieuſe Antiquité ait produites. Malheureuſement il ne tient que trop bien ſa parole.

TEXTE DE VITRUVE.

SECTIO XVII.

De catapultarum baliſtarúmque contentionibus & temperaturis.

§. 38. *Sumuntur tigna ampliſſima longitudine, ſupra figuntur cheloniæ in quibus includuntur ſuculæ. Per media autem ſpatia tignorum inſecantur & exciduntur formæ, in quibus exciſionibus includuntur capitula catapultarum, cuneisque diſtinentur, ne in contentionibus moveantur. Tum vero modioli aerei in ea capitula includuntur, & in eos cuneoli ferrei, quos ἐπισχίδας Græci vocant, collocantur. Deinde anſæ rudentum induntur per foramina capitulorum, & in alteram partem trajiciuntur, deinde in ſuculas conjiciuntur, involunturque vectibus, uti per eas extenti rudentes, cum manibus ſint tacti, æqualem in utroque ſonitus habeant reſponſum. Tunc autem cuneis ad foramina concluduntur, ut non poſſint ſe remittere. Ita trajecti in alteram partem eadem ratione vectibus per ſuculas extenduntur, donec æqualiter ſonent. Ita cuneorum concluſionibus ad ſonitum muſicis auditionibus catapultæ temperantur.*

TRA-

TRADUCTION DE M. PERRAULT.

CHAPITRE XVII.

De la maniere de bander les catapultes & les balistes avec la justesse qui est nécessaire.

Il faut avoir deux longues pieces de bois sur lesquelles on attache des amarres pour passer des moulinets. Au milieu de chacune de ces pieces on fait une entaille, où l'on met le chapiteau de la catapulte, qui y est affermi avec des chevilles, afin que l'effort du bandage ne le puisse arracher. Après cela on enchasse dans ce chapiteau des barillets de cuivre, dans lesquels on met des chevilles de fer, que les Grecs appellent *Epischidas*. Ensuite on passe par l'un des trous qui sont au travers du chapiteau le bout du cable que l'on attache au moulinet, autour duquel il s'entortille lorsqu'on le fait tourner avec les leviers, & on le bande jusqu'à ce qu'étant frappé avec la main, on connoisse le ton qu'il doit avoir. Alors on met la cheville au trou du chapiteau pour servir d'arrest, & empêcher que rien ne lâche: & ayant passé le cable à l'autre côté de la même maniere, on le bande avec les leviers & le moulinet, jusqu'à ce qu'il sonne le même ton que l'autre: & c'est par cet arrest fait avec les chevilles de fer, que l'on tend la catapulte avec la justesse qui est nécessaire, observant le ton que sonnent les cables.

D'abord l'Auteur décrit dans cette section les Instrumens qui servoient à tendre les cordes des catapultes & des balistes avec une force incroyable: les Grecs les appelloient ἐντόνια. Ensuite il rapporte en détail les travaux requis pour cette opération. Enfin il fournit le caractere de la réussite, qui consiste dans un son non seulement assez aigu, mais égal, que rendent les cordes. En effet, lorsque ce son partoit des cordes pincées avec les doits, on étoit assuré que les cordes étoient tendues avec toute la vehémence qu'elles peu-

vent soutenir: l'égalité du son étoit en même tems une preuve de l'égalité des forces. Vitruve nous a mal servi, en ne nous instruisant, ni de l'épaisseur des cordes convenable à chaque grandeur des machines, ni de la hauteur du ton qui indiquoit la plus forte tension; choses qui, dans ce tems-là devoient être connues & rendues familieres par l'usage à tous les Ingénieurs. Il nous faudra donc recourir à Héron, qui exprime ces détails avec beaucoup plus d'exactitude & d'étendue en ces termes.

Planche XI. Fig. 1. „Voici comment l'on construit les Ἐντονία. On prend deux „pieces de bois de charpente quarrées & égales αβγδ, que l'on assujettit ensemble par quatre traverses égales, telles que εζηϑ, dont „deux doivent avoir aux extrémités des tenons, qui, engagés dans des „bois quarrés, parviennent jusqu'à la partie extérieure, en sorte que „les clavettes ou petits coins chassés dans les trous des tenons assujet„tissent tout ce chassis. Vers les extrémités des chassis il faut adapter „des moulinets tels que κλ, μν, & dans lesquels il y ait des trous „par lesquels on passe des leviers, soit à leurs extrémités, soit, au mi„lieu pour les faire tourner. Les bois quarrés débordent les traver„ses ε, ϑ. Ainsi, quand on veut tendre les hemitonia d'un Palinto„ne, ou le plinthium d'un Euthytone; après avoir arrangé de la ma„niere susdite le parastate, l'antistate & les deux péritretes, on met sur „les barillets les épizygides *), on resserre les deux traverses ζη, & „après les avoir bien affermis par des coins poussés dans les mortaises, „on attache un des bouts de la corde à l'épizygis, on fait passer l'autre „par le trou opposé, & après l'avoir conduit & attaché au moulinet, „on le tend, jusqu'au point où l'épaisseur d'une corde faite de cheveux „diminue d'un tiers. Tout cela étant fait, on arrête la corde auprès „du barillet au moyen d'une espece de bouchon, *peristomis* **), (de „peur qu'elle ne ressaute en arriere,) & en la détachant du moulinet, „on fait repasser son extrémité par les creux des barillets qui la condui„sent à l'autre moulinet; & par ces diverses manieres on parvient à exé-

*) Voyez Planche IX. Fig. 2. & 3.

**) Planche XI. Fig. 2.

„exécuter peu à peu le pelotonnement qui doit se faire sur l'épizygi-„de. La péristomide est un bois qui a deux ou trois empans de lon-„gueur, & où l'on fait une entaille (θιατόμὴν) proportionnée à l'épais-„seur de la corde (πρὸς τὸ τȣ̃ τόνου πάχος). Quand la corde a été „passée & entortillée ainsi par les creux, & que le creux (du barillet) „est tellement rempli qu'on a de la peine à y introduire ce qui reste de „corde, on prend une cestre (aiguille) de fer ronde bien polie & des „plus aigues, & on la fait entrer à coups de marteau dans les creux sus-„dits; après quoi, lorsqu'on apperçoit que la place est assez élargie „pour recevoir la corde, qu'on la fasse passer. Que si l'on y ren-„contre de la difficulté, qu'on ait recours à une Rhamphis, (aiguille „percée,) & après avoir partagé le bout de la corde, qu'on la fasse „passer par le trou qui est dans cette aiguille, & qu'on la tire. Enfin, „lorsqu'on jugera que les barillets sont assez remplis, ce qui reste de „la corde, s'il y en a beaucoup, peut être coupé; si ce n'est qu'un „petit bout, il suffit de le nouer vers le milieu de la corde."

Planche XI. Fig. 2. Planche XI. Fig. 3. Fig. 4.

Quoique Héron ait fait de son mieux pour décrire & mettre véritablement sous les yeux du Lecteur cet Instrument, il a pourtant oublié l'Apolabium, espece d'étau à main, qui saisit la corde passée par la peristomide, & ne la lâche qu'après que la vis adaptée pour cet usage a été retournée. Philon, qui se plaint beaucoup de ce que les apolabes rongent les cordes, & du tems qu'il faut perdre à ce travail, rejette les Entonia, & conseille de pelotonner les cordes à force de bras, & après les avoir ainsi pelotonnées, de les tendre à grands coups de marteau au moyen de coins appliqués entre le barillet & le péritrete. Ce conseil est sans doute préférable à la manoeuvre vulgaire; cependant il est également nuisible au péritrete & aux barillets; car ces grands coups de marteau si fréquemment réitérés me paroissent propres à relâcher l'assemblage des pieces qui composent les Hemitonia. C'est ce qui m'a fait inventer un nouveau moyen de remédier à ces inconvéniens: j'ai ajouté de part & d'autre aux épizygides deux vis qu'on fait tourner au moyen d'une clef, de façon que les cordes, pelotonnées simplement avec la main sur les épizygides, peuvent être gouvernées &

Fig. 5. Planche IX. Fig. 5. x, y.

& tendues à volonté. Ces vis mettent non seulement en état de remédier tout d'un coup au relâchement des cordes, mais encore elles épargnent le travail de détacher les hémitonia de la machine, & de les faire descendre à terre.

Une derniere conclusion que je tire de l'exposé de Héron, c'est que les cordes, tant des balistes que des catapultes, quoique leur masse fut très considérable, n'avoient pourtant pas une fort grande épaisseur; autrement les aiguilles n'auroient pu les faire passer par les barillets déjà tout farcis de leur pelotonnement.

Il nous reste à donner la description de l'Onagre, Machine de Guerre dont Jules César faisoit un cas infini. Ammien Marcellin la dépeint d'une maniere qui ne laisse rien à désirer; tandis qu'on n'en trouve pas le moindre vestige dans Vitruve, ni dans les autres Écrivains qui traitent de ces matieres.

§. 39.

SUR L'ONAGRE.

TEXTE D'AMMIEN MARCELLIN.

Dolantur axes duo querni vel ilicei, curvanturque mediocriter, ut prominere videantur in gibbos, hique in modum serratoriæ machinæ connectuntur, ex utroque latere patentius perforati. Quos inter per cavernas funes colligantur robusti, compagem ne dissiliat continentes. Ab hac medietate restium ligneus styles exsurgens obliquus, in modum jugalis temonis erectus, ita nervorum nodulis implicatur ut altius tolli possit & inclinari, summitatique ejus unci ferrei copulantur, e quibus pendet stupea vel ferra funda. Cui ligno fulcimentum prosternitur ingens cilicium palis confertum minutis, validis nexibus illigatum & locatum super congestos cespites vel latericios aggeres. Nam muro saxeo hujus modi moles imposita disjectat quicquid invenerit subter concussione violenta, non pondere. Quum igitur ad concertationem ventum fuerit, lapide rotundo fundæ imposito, quaterni altrinsecus juvenes repagula, quibus incorporati sunt funes explicantes, retrorsus stylum penes rocinum

num inclinant. Itaque demum sublimis adstans magister claustrum quod totius operis continet vincula, reserat malleo forti percussum. Unde absolutus icto volucri stylus & mollitudine offensus cilicii, saxum contorquet quicquid incurrerit collisurum. Et tormentum quidem appellatur ex eo quod omnis explicatio torquetur. Scorpio autem, quoniam aculeum desuper habet erectum, cui etiam Onagri vocabulum indidit ætas novella, ea re quod asini feri, quum venatibus aguntur, ita eminus lapides post terga calcitrando emittunt, ut perforent pectora sequentium, aut perfractis ossibus capita ipsa displodant.

Le celebre Folard, à qui l'on est redevable de recherches si excellentes sur l'Art militaire des Anciens, a confondu cet Onagre d'Ammien Marcellin avec la Catapulte & la Catapulte avec la Baliste. Une erreur est presque toujours la source féconde de plusieurs autres; & de là est arrivé qu'en employant toute sa sagacité à concilier Ammien avec Vitruve, il a imaginé une Machine, que ni l'un ni l'autre de ces Auteurs ne reconnoîtroit pour la sienne. Je suis pourtant persuadé que Folard auroit retrouvé & reproduit l'Onagre dans sa parfaite intégrité, si en examinant plus patiemment les opinions dont il s'étoit laissé prévenir, il avoit comparé Vitruve avec les fragmens des Auteurs Grecs. Mais, en négligeant cette précaution, il n'a pu que s'écarter de la b[illegible] voye. C'est à cela que j'attribue le défaut d'exactitude qui regne dans sa description des trous, la maniere déplacée dont il substitue le bras de l'onagre retiré du moulinet à la manucle, ou au crochet, l'idée enfin où il est que toute la force du bras vient plutôt de la façon de tourner les cordes que de leur tension; tandis que, de l'aveu de tous les Méchaniciens experts, la tension d'une corde suivant sa longueur produit un mouvement plus vif que sa contorsion. Il mérite pourtant des éloges en ce qu'il conseille de composer les grands bras de deux tiges, & de les lier avec une grande quantité de cordes, de peur qu'ils ne se rompent par la violence du coup qui les heurteroit contre le cilice, quoique traversé de petits pieux. J'admire au fond la sagacité de cet habile homme, qui, sans autre secours, que

le

le récit assez stérile d'Ammien, a mis au jour une Machine qui ne s'écarte pas beaucoup de la vraye figure & structure de l'ancienne, dont il n'avoit pu pourtant rassembler le squelete, mais tout au plus quelques ossemens brisés & dispersés çà & là. Mais pour venir au sujet même, on verra, je crois, la forme exacte de l'Onagre, Pl. XI. Fig. 6.

D'abord se présentent deux pieces de bois très fortes & plus épaisses aux endroits des trous. La liaison faite à la ressemblance d'une machine à scier, & la maniere d'affermir toute la structure avec de fortes cordes, ne peuvent signifier autre chose que le systeme des cordes qui se rencontre dans chacun des hemitonia. La piece pointue qui s'éleve du milieu des cordes sous l'apparence d'un timon, est le bras *fg*, dont la fronde ou la main se voit en *f*. Le tapis étendu *hik* est un sac de poil *l* bourré de paille hachée, & attaché par les noeuds les plus forts; le crochet, est en *m*.

Que les anciens Capitaines ayent eu des Onagres à roues qu'ils faisoient trainer à leur suite, & dont ils se servoient dans les combats, c'est ce dont nous avons un garant bien authentique dans Jules-César. Je ne doute point que l'Onagre n'ait produit les mêmes effets que la baliste, pourvu que le barillet ait été assez large pour qu'on y ait pu faire entrer la quantité de cordes nécessaire pour deux Hemitonia. C'est peut-être avec ces machines qu'on lançoit le feu G[illegible]is, les cadavres, & cette grêle de pierre dont on écrasoit les to[illegible]es maisons & qu'on faisoit pleuvoir sur les soldats qui défendoient les murs ou les remparts. Mais en voilà assez. J'attendrai le jugement que porteront de mon travail les personnes éclairées & respectables auxquelles je le présente. S'il obtient leur suffrage, ce sera pour moi la plus précieuse de toutes les récompenses.

SUR

SUR L'ORIGINE ET LES EFFETS DES MACHINES DE GUERRE QUE LES ANCIENS NOMMOIENT *TORMENTA.*

PAR M. SILBERSCHLAG.

Traduit du Latin.

Encouragé par l'accueil favorable que l'illustre Académie Royale a bien voulu faire à mes premieres recherches sur les Machines polioroétiques, je m'empresse à les continuer, & je me propose en particulier de trouver le calcul propre à déterminer les forces de ces machines. Je me flatte d'avoir déja fait des progrès assez considérables dans ce travail; mais, comme diverses occupations attachées à mes fonctions publiques, ne m'ont pas permis de la conduire à sa fin, je ne donnerai ici que la partie historique rélative aux Machines de guerre qui ont porté le nom de *tormenta.*

En réflèchissant sur les voyes les plus convenables pour parvenir à mon but, j'ai cru devoir partir des tems où nous vivons, & insensiblement en remontant, & en recueillant toutes les traces de ce genre qui subsistent, jusqu'à ce que je fusse arrivé aux tems au delà desquels le défaut des anciens monumens ne permet pas d'aller. J'apporterai la plus grande attention à ne citer que des Auteurs entierement dignes de foi pour n'avancer rien que de certain sur les effets épouvantables de ces monstres de guerre.

On s'imagine bien que nous avons conservé plusieurs vestiges de ces puissans efforts de l'art des Anciens, dont l'existence a échapé à l'injure du tems. Si depuis longtems les balistes & les catapultes, les scorpions & les onagres ont disparu, & sont comme engloutis dans l'abyme du néant, il n'en est pas de même de ces pierres pesantes & de ces globes qui rongés de vieillesse se trouvent, en partie répandus dans toutes les villes d'Allemagne, en partie placés au coin des rues pour défendre les maisons des atteintes des voitures. A Magdebourg, en particulier dans le quartier du vieil Arsenal, j'ai compté sans peine une soixantaine de ces globes, qui ont été taillés autrefois pour l'usage de la Guerre, & dont les moindres pesent deux cens livres. On pourroit conjecturer qu'ils n'étoient destinés qu'à des ornemens d'Architecture. Mais, dans ces tems-là, il n'y avoit d'autre Architecture en vogue par toute l'Allemagne que la Gothique, d'où ces globes sont bannis, & qui ne présente que des pyramides, des entortillemens de feuilles ridicules, & des figures d'animaux chimériques. Je sai bien que, dans les premiers matieres dont on s'est servi, on a employé des boules de pierres; mais je sai aussi qu'on n'auroit pu y mettre celles dont je parle, dont la figure n'est rien moins qu'exactement sphérique, à moins que de vouloir de gayeté de coeur abymer ces grands mortiers. Quant aux cailloux balistiques, que je vois à presque tous les coins & dans les rues de Magdebourg, la plûpart sont à trois pointes, forme qui étoit la plus convenable pour remplir exactement le sac placé au milieu de la zone des palintones. Tandis que j'écrivois ceci, j'ai eu occasion de m'entretenir avec un Officier d'Artillerie Autrichien, nommé Krause, qui m'a raconté que, dans la marche qu'il avoit faite avec l'Armée par la Boheme, il avoit passé à Bechin, & qu'en parcourant les ruines de la Citadelle de ce lieu, le Commandant de la ville lui avoit montré des pierres à trois pointes du poids de cent livres, dont ce fameux Zech, qui a autrefois ravagé la Boheme, se servit les lançant d'une montagne voisine sur ceux qui défendoient la Citadelle. Comme la distance de la montagne & le poids des pierres rendoient incroyable ce récit, ceux qui l'entendoient se mirent

à

à rire; mais le Commandant transporté de colere en appella aux Ecrits les plus anciens & les plus authentiques qui attestoient le fait; de sorte qu'on cessa de rire, & qu'on admira au contraire les merveilles de l'art des Anciens. Je voudrois bien être à portée de vérifier les distances en question. Je passe sous silence le siege de Carlostein, dont Folard fait mention, & pendant lequel les Hussites, assiégés par les Troupes de l'Empereur, furent mis au désespoir par les cadavres d'hommes & de chevaux dont on les accabloit. En peu de tems les murailles, les rues, les toits furent si remplies de chairs & d'entrailles pourries, que deux mille chariots ne furent pas suffisans pour enlever ces immondices, ni tous les parfums de la Ville pour préserver de l'infection.

Sans m'arrêter aux autres monumens que pourroit encore fournir l'histoire des mêmes siecles, je me hâte de remonter au tems des Empereurs Romains. Je trouve un trait bien remarquable dans la vie de Julien l'Apostat, c'est qu'il faisoit usage de balistes, dont un seul coup écrasoit une tour entiere, apparemment de planches, & la renversoit des murailles des assiégés. J'ai déjà fait mention dans mon Mémoire précédent de la Colomne Trajane, qui a conservé à la postérité la vraye forme d'un *tormentum*.

Mais ce que Josephe rapporte des machines à lancer des pierres que Vespasien employa pour assieger Jotapata, place défendue par Josephe même, surpasse presque toute créance. Telle étoit, selon lui *), la force du coup, qu'un homme qui en étoit frappé tomboit écrasé, & que le crane avec le casque étoit emporté jusqu'à trois stades. Une femme enceinte, qui venoit de sortir de chez elle, ayant été atteinte d'une pierre au ventre, le fruit qu'elle portoit dans ses entrailles en sortit, & fut emporté jusqu'à un demi-stade. Le même Josephe témoigne que ces machines si funestes à Jotapata, firent de

 bien

*) *Guerre des Juifs*, Liv. III. Sect. 7. *Hegesippe*, Liv. III. Quoique Josephe ait en toute autre chose fort flatté & vanté les Romains, il se seroit exposé à un trop grand ridicule, en rapportant à faux de pareils faits que tant d'yeux avoient pu voir.

bien plus grands ravages encore à Jerusalem. Cet Historien Juif, qui étoit alors du côté des Romains, avoit la pleine liberté d'examiner toutes les opérations du siege, de voir en particulier & de manier les Machines poliorcétiques. Ce qu'il vante le plus, ce sont les balistes de la dixieme Légion, avec lesquelles on lançoit à la distance de deux stades & plus des pierres dont les coups écrasoient non seulement ceux qui en étoient frappés, mais blessoient mortellement des personnes placées à un assez grand éloignement. Les Juifs qui faisoient les derniers efforts de défensive, plaçoient des sentinelles au haut des tours pour avertir leurs soldats quand il partoit de semblables pierres que leur éclat faisoit appercevoir, ou leur bruit entendre. Mais les Romains, remarquant cette précaution, noircirent les pierres afin de les soustraire du moins à la vue.

Que faut il donc penser de la rapidité de ces pierres, si grande qu'il suffisoit d'en changer la couleur pour les rendre invisibles? Silius Italicus avoit sans doute bien raison de leur consacrer ces vers *):

— — adducta stridula nervis
Phocais effundit vastos Balista molares;
Atque eadem mutato pondere teli,
Ferratum excutiens ornum, media agmina rumpit.

Mais, pour éviter la longueur & ne pas trop accumuler de citations, j'omets une longue suite de tems pour me transporter tout à coup aux rivages de Sicile, & y contempler l'intéressant spectacle, non de l'attaque, mais de la défense de Syracuse, conduite par ce grand Archimede, qui fit alors voir à tout l'Univers, combien le génie d'un seul homme, d'un grand Géometre, peut être tutelaire pour une Ville dans de pareilles circonstances. Les Romains ont avoué tout d'un voix que Marcellus avec son Armée & sa flotte avoit fait la guerre au seul Archimede. La premiere occasion où ils ressentirent la force de ces balistes fut un combat naval livré au pied des murs de Syracuse. Archimede disposa sur ces murs des machines (*tormenta*) de

*) Liv. I.

de diverse grandeur, dont il y en avoit qui lançoient sur les Galeres à cinq rangs les plus éloignées des pierres enormes, du poids quelquefois d'un millier, par lesquelles ces vaisseaux étoient fracassés avec un bruit épouvantable; tandis qu'il ne faisoit pleuvoir sur les plus voisins que des traits moins pesans, mais d'autant plus fréquens. Vers la fin du siege, il fit faire aux murs de proche en proche des ouvertures d'environ une coudée par lesquelles on faisoit partir des traits décochés en partie avec l'arc, en partie par de petits scorpions, dont les coups frappoient l'ennemi en cachette & à l'improviste. Les navires qui s'approchoient trop près, couroient encore un autre risque; un bras de fer attaché à une forte chaîne s'avançoit de dessus un mur élevé, on jettoit ce bras de façon qu'il accrochoit la proue, soulevoit le navire & le mettoit sur sa pouppe; après quoi, en le lâchant soubitement, il retomboit avec fracas de façon à être brisé ou submergé. Je m'arrête, & n'en dis pas davantage la dessus. Que ceux après cela qui traitent l'art militaire des Anciens par rapport aux Machines de pure bagatelle, voyent comment ils soutiendront leur these contre de pareils faits.

N'ayons point honte de nos ancêtres; ils en savoient autant que nous dans l'art de ravager les païs, de briser des murailles, d'ébranler des forteresses, d'exterminer des troupes d'hommes à la fois, & d'offrir, pour ainsi dire, mathématiquement des victimes à la mort. Ils ont certainement mérité d'avoir des descendans tels que nous, comme nous méritons d'être descendus d'eux.

Nous pourrions aussi nous étonner de la profusion des Anciens dans les fraix de la construction de ces Machines; si nous ne savions que quatre balistes ne leur coûtoient pas plus que nous coûte un de nos canons. Bornons-nous ici à un seul exemple. Scipion, après la prise de Carthagene, y trouva cent-vint catapultes des plus grandes, deux cens quatre-vint & une plus petites; vint-trois grandes balistes, cinquante deux petites, & un nombre considérable de scorpions tant grands que petits.

Tandis que nous sommes encore dans la poussiere & dans l'obscurité de ces tems les plus reculés, il convient de rechercher en peu de mots quels ont été les inventeurs des machines en question. Il est manifeste que les Romains n'ont jamais aspiré à cette gloire; & en général, Rome n'a été le berceau d'aucune science distinguée. On est donc partagé à cet égard entre les Grecs couverts déjà de tant de gloire, & les Siciliens, Nation adroite & ingénieuse. Si l'on vouloit déferer cet honneur aux Grecs, je ne sçai comment on pourroit expliquer l'anecdote suivant laquelle Archidamas, Général des Lacédémoniens, ayant considéré un trait de catapulte qu'on avoit apporté de Sicile, s'écria: *C'en est donc fait de la valeur* *). Je n'insiste pas sur ce que Philon, Héron, Athénagore, & les autres Auteurs qui ont écrit des Machines de guerre, s'accordent à les faire remonter jusqu'aux siecles les plus enfoncés dans l'obscurité des tems. En dépouillant donc les Grecs de cette prérogative, il faut nous tourner du côté des Siciliens, que les Auteurs les plus célebres, & en même tems les plus dignes de foi, ont félicité d'avoir inventé les *tormenta*. Qui est-ce qui ne respecteroit pas des témoignages tels que ceux de Diodore de Sicile **) & de Plutarque, dont l'un décide que l'art des catapultes prit naissance à Syracuse, dans le tems de la guerre dont Denys l'ancien faisoit les préparatifs contre les Carthaginois, l'autre assure que la *Bélopée* a passé de Sicile en Grece. Elien ***) a même poussé la témérité jusqu'à donner positivement à Denys l'honneur de cet art méchanique. Mais, quand tous les Diodores, tous les Plutarques, tous les Eliens, se réuniroient pour nous inculquer cette idée, & que nous ne serions guidés par aucune trace des tems précédens; qui pourroit se persuader que des machines aussi compliquées, pour la construction desquelles il y avoit tant d'art à déployer, tant de difficultés à vaincre, en un mot pour lesquelles on peut dire que la Méchanique a déployé tous ses trésors, que de telles machines soyent la production d'un seul homme, & qui

plus

*) Voyez les Apophtegmes de Plutarque.

**) Liv. XIV.

***) *Var. Hist.* Lib. VI.

plus est, d'un Tyran? Ou bien, peut-on croire que Denys ait fait mener dans son camp des instrumens d'une invention récente, & dont l'usage n'étoit pas encore bien connu, pour les employer contre des ennemis dont il connoissoit l'habileté & l'expérience? Ne doit-on pas plutôt conjecturer que les Siciliens, contraints par la nécessité, & pour n'être pas inférieurs à leurs ennemis du côté des armes, adoptèrent les *tormenta* des Carthaginois? Est ce donc à ceux-ci qu'il faut adjuger la palme? Je ne le crois pas non plus. En effet, Pline traitant des premiers inventeurs des Arts, nous conduit des Phéniciens, aux Syrophéniciens Nation qu'on peut qualifier bisayeule des Carthaginois. Voici ses propres termes: *Venabula & in tormentis scorpionum, Cretas; catapultarum, Syros; Phœnicas balistam & fundam* *). Il suffit que les Phéniciens ayent inventé la baliste: nous pourrions faire présent de la catapulte aux Crétois, connus d'ailleurs pour des vrais fanfarons, si, en comparant ces deux machines, l'on n'étoit forcé de convenir que le pere de la baliste doit aussi avoir engendré la catapulte? Je n'ignore pas qu'on ne sauroit compter en toute sureté sur l'autorité du seul Pline; & je ne l'aurois pas même employé pour garant, vu le reproche de crédulité auquel il est exposé, si je ne pouvois m'appuyer en même tems sur nos Saintes Lettres, qui contiennent les vrayes origines de tout le genre humain, & où l'on trouve un monument de cette invention dans la vie du Roi Hozias. Ce Monarque, qui monta sur le Throne de David vers l'an du monde 3174, & qui l'occupa glorieusement, fit prendre par sa sagesse une nouvelle forme à l'Etat. Il fortifia les murs de la Capitale, en y élevant non seulement des tours, mais en y plaçant des Machines très artistement faites qui servoient à lancer des traits & des pierres **).

La conséquence évidente de ce fait, c'est qu'avant Hosias les machines balistiques étoient en usage; & qu'elles avoient été inventées

*) *Hist. Nat.* Liv. VII. Sect. LVI.

**) Voici les paroles du Texte original: II Chron. XXVI. 15.
ויעש בירושלם חשבנות מחשבת חושב להיות אל־המגדלים ועל־הפנות לירוא
בחצים ובאבנים גדלות׃

rées non par les Juifs, l'Ecriture gardant un profond silence à cet égard, mais par un peuple voisin qui étoit en commerce avec les Israëlites. Si ces machines avoient déjà été connues du tems de Josaphat, ce grand restaurateur des choses militaires, non moins que des choses sacrées, qui mit des garnisons perpétuelles dans toutes les villes fortes qui avoient été bâties par le Roi Asa, n'auroit pas négligé d'y placer des *tormenta*. Le commencement de l'époque des balistes paroit donc tomber sur le milieu de l'intervalle de tems écoulé entre Josaphat & Hozias.

Si nous nous attachons outre cela à considérer la structure de ces machines, on sentira bien qu'elles doivent avoir eu pour inventeurs des hommes accoutumés à manier des cables & des leviers, tels qu'étoient les Syrophéniciens qui ont excellé dans l'art de la navigation. Les choses étant ainsi, il ne reste aucun doute, que, conformément au témoignage de Pline, ce peuple l'un des plus anciens, ne doive être décoré du laurier de l'invention à l'égard de la balistique, comme il l'est déjà par rapport à plusieurs autres arts. C'est donc de chez lui que cette invention meurtriere a passé d'abord en Judée, d'où elle a été transportée à Carthage, en Sicile & en Espagne. De Sicile cette peste a gagné la Grece; & les Romains l'ont, pour ainsi dire, acquise & conquise les armes à la main. Les Romains à leur tour ont instruit les Gaulois & les Germains à détruire leurs ennemis par de semblables voyes; & les Germains enfin, surpassant de beaucoup ces arts redoutables, ont produit le plus terrible de tous, ils ont forgé ces foudres de guerre, qui répandent sur mer & sur terre l'épouvante & la mort.

Je crois m'être acquitté, suivant la mesure de mes forces, de la tâche que j'avois entreprise; il ne me reste qu'à rendre graces à l'Académie de ses bontés, & à faire les voeux les plus ardens pour son auguste Protecteur.

THÉO-

THEORIE

DES MACHINES DE GUERRE DITES *TORMENTA*.

Je me propoſe de répandre encore du jour ſur l'art baliſtique, ou la *Bélopée* des Anciens par une nouvelle voye, c'eſt celle du calcul. Entre toutes les machines des Anciens, la Baliſte eſt celle qui attire les regards & fixe l'attention, comme étant inconteſtablement la plus parfaite & celle dont l'exécution rencontroit le plus de difficultés à vaincre. Je vais donc conſacrer toute mon application à en bien développer le méchaniſme.

THÉOREME I.

La longueur du bras, engagé dans les cordes de l'hémitonium, *ne doit pas aller au de là de ſix diametres.*

DÉMONSTRATION.

On a deſſein que le bras pouſſe la zone avec la plus grande force & la plus grande viteſſe. Les vibrations des leviers longs peuvent bien avoir une grande viteſſe, mais elles ſont foibles; au lieu que, dans les leviers courts, le décroiſſement de la viteſſe produit l'accroiſſement de la force. Pour obtenir la juſte longueur, il faut combiner le degré de viteſſe & celui de force qui ſont requis pour produire l'effet le plus convenable. Je me ſervirai ici d'un lemme inſéré dans les Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris de l'année MDCCIV par M. Parent. Cet habile Geometre démontre par l'analyſe, que, pour obtenir le plus grand effet, un corps mu doit conſerver le tiers de la viteſſe des forces qui exiſtoient avant le choc. Ainſi ce ſont les deux tiers de la viteſſe qu'il faut attribuer à la maſſe. Or les maſſes ſont dans la rélation des quarrés de la viteſſe; & par conſéquent $\frac{2}{3}^2 = \frac{4}{9}$ déterminent la rélation de la maſſe, ou de l'obſtacle, par rapport aux forces motrices. Le moment de l'action réſulte du produit de la viteſſe par la maſſe. Multipliez donc $\frac{4}{9}$ & $\frac{1}{3}$ de la viteſſe de la force motrice: il en naîtra la meilleure rélation des forces en équilibre; ce dont on peut juger par les momens des actions en fixant celles-ci à $\frac{4}{9} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{27}$.

Mais la même proportion doit avoir lieu pour les distances où les forces appliquées au levier sont du point d'appui. De là soit la distance du centre d'action des cordes à la distance où la force est du point d'appui, ou de gyration, comme 4 : 27 dans chaque bras.

Pl. VIII. Fig. 3. Il est nécessaire que nous fixions les points des distances. Que si l'on fait tourner les barillets pour tendre les bras, le volume des cordes se partage, une partie entre dans le lieu DC, l'autre retombe au lieu CE, le point d'appui étant laissé en C. Le lieu y doit être pris pour la moyenne distance des cordes, à moins que les cordes du quart de cercle DZy ne fussent fort éloignées, & par conséquent trop tendues par rapport aux cordes du quart de cercle yCs. C'est pourquoi la distance du centre de l'action de tout l'hémitonium est mieux déterminée par la ligne nC = $\frac{3}{4}$ de diametre que par la ligne yC. Il est donc permis de conclurre

$$\begin{matrix} & nC & AC \\ 4 : 27 = & \frac{3}{4} : & 5. \end{matrix}$$

En ajoutant la ligne EC = 1, on aura six diametres, qui font toute la longueur du bras engagé dans les cordes, suivant Vitruve § 36.

THÉOREME II.

Pl. VIII. Fig. 4. *La corde tendue AB, étant conduite avec force par l'espace CD, & sollicitée ainsi à la vibration, la force vibrante est à la force tendante dans le rapport de CD à CB.*

DÉMONSTRATION.

Soit AB la corde tendue, les deux poids G & P expriment la force tendante = V. Si outre cela on suspend en C un poids égal à la force vibrante = v, en conduisant la corde du point C en D, cela étant fait, la différence des côtés AD & AB, savoir la petite ligne EC prise deux fois sera égale à l'espace par lequel la force tendante est mue, & CD = à l'espace parcouru par la force vibrante.

brante. Or les poids sont en raison réciproque des espaces parcourus en supposant l'équilibre; d'où s'ensuit

$$2EC : CD = v : V.$$

En continuant l'arc ED du centre B jusqu'au point F, on trace un demi-cercle, dont le diametre contient la ligne CF égale à la somme des côtés CB + DB. Les regles de la Géométrie mettent en droit d'en inférer

$$EC : CD : CF, \text{ ou } CB + DB.$$

Faites que CD soit un espace infiniment petit: Vous pourrés substituer 2 CB au lieu de CF. Pour abréger, qu'on nomme CD = S, CB = b, alors le rapport 2 EC : CD, ou 2 CD : 2 CB prendra cette forme

$$\begin{aligned} 2S : 2b &= v : V \\ S : b &= v : V \end{aligned}$$

Donc $\frac{SV}{b} = v.$

Cette formule est d'usage, si, étant donnés la force tendante, la longueur de la corde, & l'espace par lequel elle est tendue, on vouloit savoir la force vibrante, qui, dans une baliste de 10 pouces de diametre, surpasse le poids de 72000 livres.

VI SCHOLIE.

Quoique j'aye éprouvé & confirmé ce théoreme par plusieurs expériences, il peut arriver cependant, lorsque les poids ne sont pas bien appliqués, que l'événement ne réponde pas à l'attente. Par exemple, qu'on attache la corde à un clou en A, & qu'on suspende un poids à l'autre extrémité B: il faut bien se garder de conclurre: $S : b = p : P$; mais on a pour conclusion $2S : b = p : P$. Car la corde fixée en A fera parcourir au poids P toute la différence des côtés AD + DB − AB, de façon que sa vitesse sera doublée, & il est par conséquent égal que l'on conclue $2S : b = p : P$, ou $S : b = p : 2P$.

OBSERVATION.

Plus le ton est clair, pur & aigu, plus il y a de fils également tendus dans la corde, mais par cela même plus son élasticité est grande. Cela étoit cause que les Anciens, en examinant d'après le son de la corde la tension qui convenoit le mieux à leur but, usoient des plus grandes précautions. Ils savoient aussi juger au mieux de l'égalité de tension au moyen d'un tuyau (*per fistulam*), sans se mettre d'ailleurs en peine, par quelles forces ou attractions les cordes étoient tirées & tendues.

THÉOREME III.

Pl. VIII. Fig. 4. *La vitesse de la vibration est en raison de l'espace S, rapporté à la longueur de la corde.*

DÉMONSTRATION.

Par le théoreme précédent $\frac{SV}{b} = v$.

Or, la longueur de la corde étant $= L$, qu'elle soit toujours égale au double de b: de ces deux suppositions suit d'elle-même cette raison $\frac{SV}{L} : v$.

THÉOREME IV.

Les tems des vibrations sont en raison directe des diametres & des longueurs des cordes, mais en raison inverse des forces tendantes.

DÉMONSTRATION.

Soit le tems de la vibration $= T$, le diametre de la corde $= D$, la longueur $= L$, la masse de la corde $= Q = D^2 L$, la force tendante $= V$, la force vibrante $= v$, la vitesse ou rapidité $= C$, le moment de la vibration $= M = QC = D^2 LC$.

Or

Or ce moment s'acheve dans le tems T, pendant lequel la force vibrante $= v$ parcourt l'espace $= S$. De là $M = vT$. Les choses qui s'accordent avec une troisieme, s'accordent entr'elles.

$$D^2 LC = M$$
$$vT = M$$
$$vT : D^2 LC$$
$$T : \frac{D^2 LC}{v}$$

$\frac{SV}{L} : v$, suivant le Théor. II. Au lieu de v, substituons cette raison en divisant; & en concluant ainsi

$$T : \frac{D^2 L^2 C}{SV}$$

C'est $\frac{S}{T}$ par les loix de la Méchanique. De là $S = CT$, & $\frac{C}{S} : \frac{1}{T}$.

C'est pourquoi, en éliminant $\frac{C}{S}$ de notre formule, mettons-y $\frac{1}{T}$.

Suivant cela $T : \frac{D^2 L^2}{TV}$

c'est à dire, $VT^2 : D^2 L^2$

$$\sqrt{V}T : DL$$

Donc $T : \frac{DL}{\sqrt{V}}$

Les tems des vibrations des différentes cordes sont donc en raison directe des diametres avec les longueurs, & en raison inverse des forces tendantes quarrées.

COROLLAIRE I.

Les diametres & les forces tendantes étant les mêmes, les vibrations sont en raison directe des longueurs.

COROLLAIRE II.

Les longueurs & les forces tendantes étant les mêmes, elles sont en raison directe des diametres.

COROLLAIRE III.

La longueur & le diametre étant les mêmes, mais les tensions étant différentes, elles sont en raison des racines de la seconde puissance des forces tendantes, mais inverse.

THÉORÈME V.

Pl. VIII. Fig 5. *Les angles* u, o, i, *dont le premier détermine la situation du bras en repos, le second le tour décrit par le bras en mouvement, le troisieme la situation du bras allongé, qu'ils soyent égaux.*

DÉMONSTRATION.

Je provoque de nouveau à la principale Loi de la Méchanique heuristique: que le plus haut degré de vitesse soit combiné avec le plus haut degré de force. Supposons que la semi-ordonnée BE soit mue du point A jusqu'en C; plus l'abscisse AB s'accroît, plus les coups du bras seront forts: & à mesure que la ligne BC prendra de plus grands accroissemens, la semi-ordonnée rétrogradant, la zone en partira d'autant plus vîte, & parcourra un plus grand espace dans la diostre. Il faut prendre un juste milieu. Soit par conséquent AB = BC. Mais alors BE est le sinus d'un angle = 60°; ce qui est constant par la Trigonométrie.

Suit l'autre partie de la démonstration, savoir que l'angle qui détermine le tour décrit par le bras en mouvement, en retranchant l'angle *i*, est égal au premier.

La semi-ordonnée GI détermine dans la ligne CD, tant la vitesse que la roideur de la zone. C'est à dire que, plus CI est grand, plus le bras est tendu avec force, & plus aussi la zone est roide; plus ID est grand, plus elle est rapide à cause de l'incrément LK qu'il faut ajouter à KF, mais elle est d'autant plus foible. Pour ne

Kk 2 pas

pas trop pencher d'un côté ni de l'autre, soit CI = ID, & l'on aura comme dans les précédentes, GI sinus de l'angle = 60°.

Reste le troisieme article de cette démonstration, que nous n'aurons aucune peine à expédier

$$\begin{array}{c} u + o = 60^\circ \\ \underline{i + o = 60} \\ i = u \end{array}$$

De plus $u + o = \frac{2}{3}$ d'un angle droit, donc $i = \frac{1}{3}$. Or $i = u$; donc aussi $u = \frac{1}{3}$, & $u + i = \frac{2}{3}$, lesquels étant soustraits de l'angle droit, le restant o est aussi $= \frac{1}{3}$, & $o = i = u$.

THÉOREME VI.

Soit l'angle E, que la zone amenée fait avec le bras = 97½°.

DÉMONSTRATION.

Sous l'angle droit les forces communiquent toute leur action à l'obstacle; &, suivant cette regle, le bras doit être disposé avec la zone sous un angle droit. Mais F aussi, où les demi-zones concourent, demande, en vertu de la même loi, un angle droit, auquel $z + y$ devroient être égaux. Cependant on trouve alors $x + y = 105°$, & par conséquent on violeroit cette loi même, tout en l'observant. La prudence veut qu'on fasse l'exception la plus petite qu'il est possible: soutrayons un angle droit de 105°, divisons le restant = 15, par 2; accordons cette demi-différence = 7½ à l'angle z = 45° = 52½; soutrayons en autant, savoir 7½, de l'angle $x + y$, auquel de cette maniere demeurera l'ouverture 60 + 37½ = 97½. Ce qui étant fait, la loi sera observée avec la moindre violation possible.

DEMANDE.

La demi-zone GL en repos soit égale à la ligne tirée EF, ou à elle-même. De plus EK = LF à cause du Théoreme II,

KF

KF soit la ligne normale avec EK. Enfin l'angle $y = 37\frac{1}{2}$ à cause du Théoreme VI, & par conséquent $E = 97\frac{1}{2}°$.

PROBLEME.

Trouver la longueur de la zone.

SOLUTION.

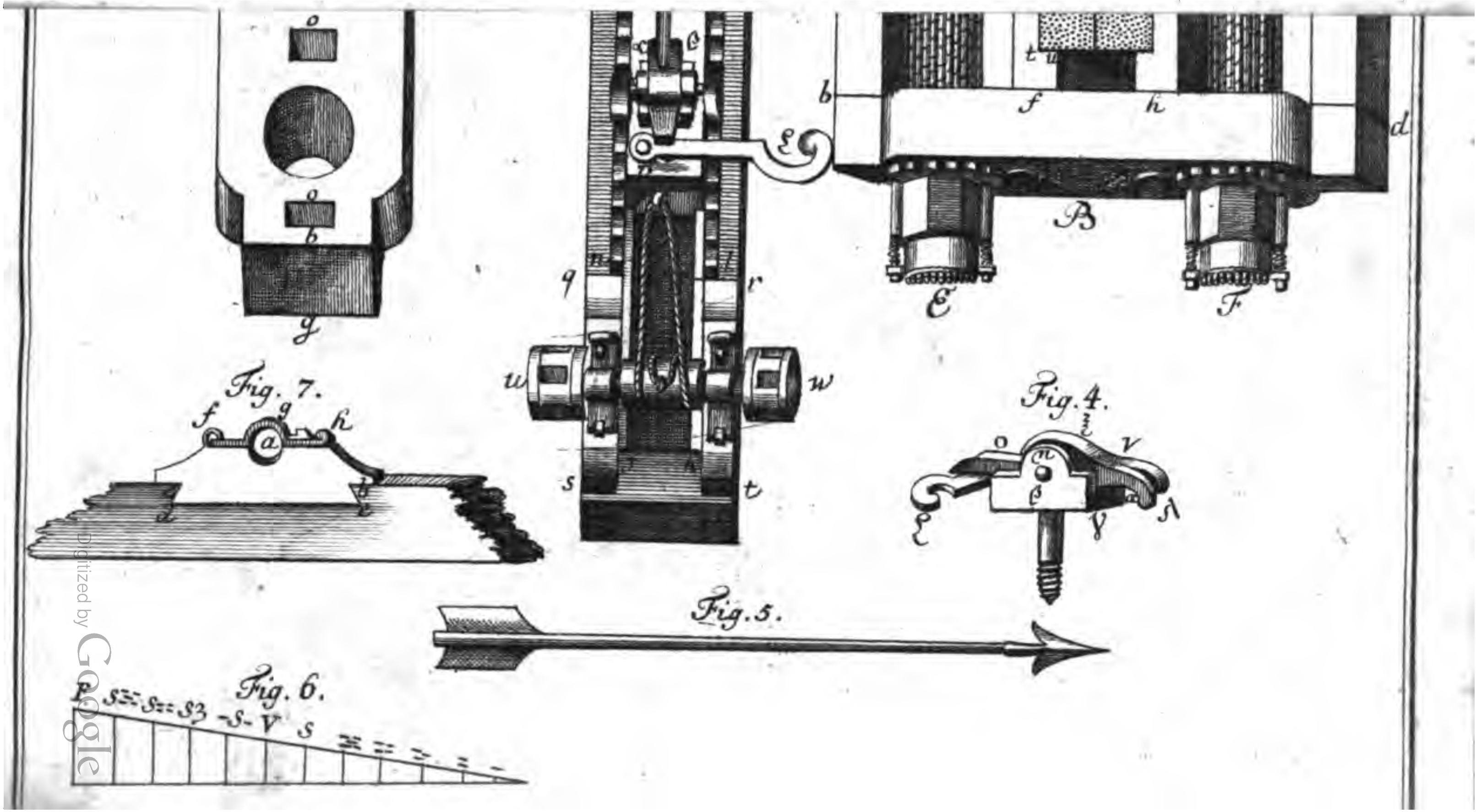
Qu'on trouve EK de la maniere suivante. En menant la corde EO, on a le triangle équilatéral EOF, dont les angles y & O à la base sont nécessairement égaux. Soit la somme de tous les angles de ce triangle $= \alpha$; & par conséquent, tant O que l'opposé y seront $= \frac{\alpha - z}{2}$ par les principes de la Géométrie. Que la différence des sinus O & i soit nommée $\phi - x$. Or $KF = EK - (\phi - x)$, & $GL = EK + (\phi - x)$, $OF = KF + 2(\phi - x)$. Donc $OK = 2(\phi - x)$. De là concluez: comme dans le triangle EKO l'angle opposé à $2(\phi - x)$, ainsi O à EK.

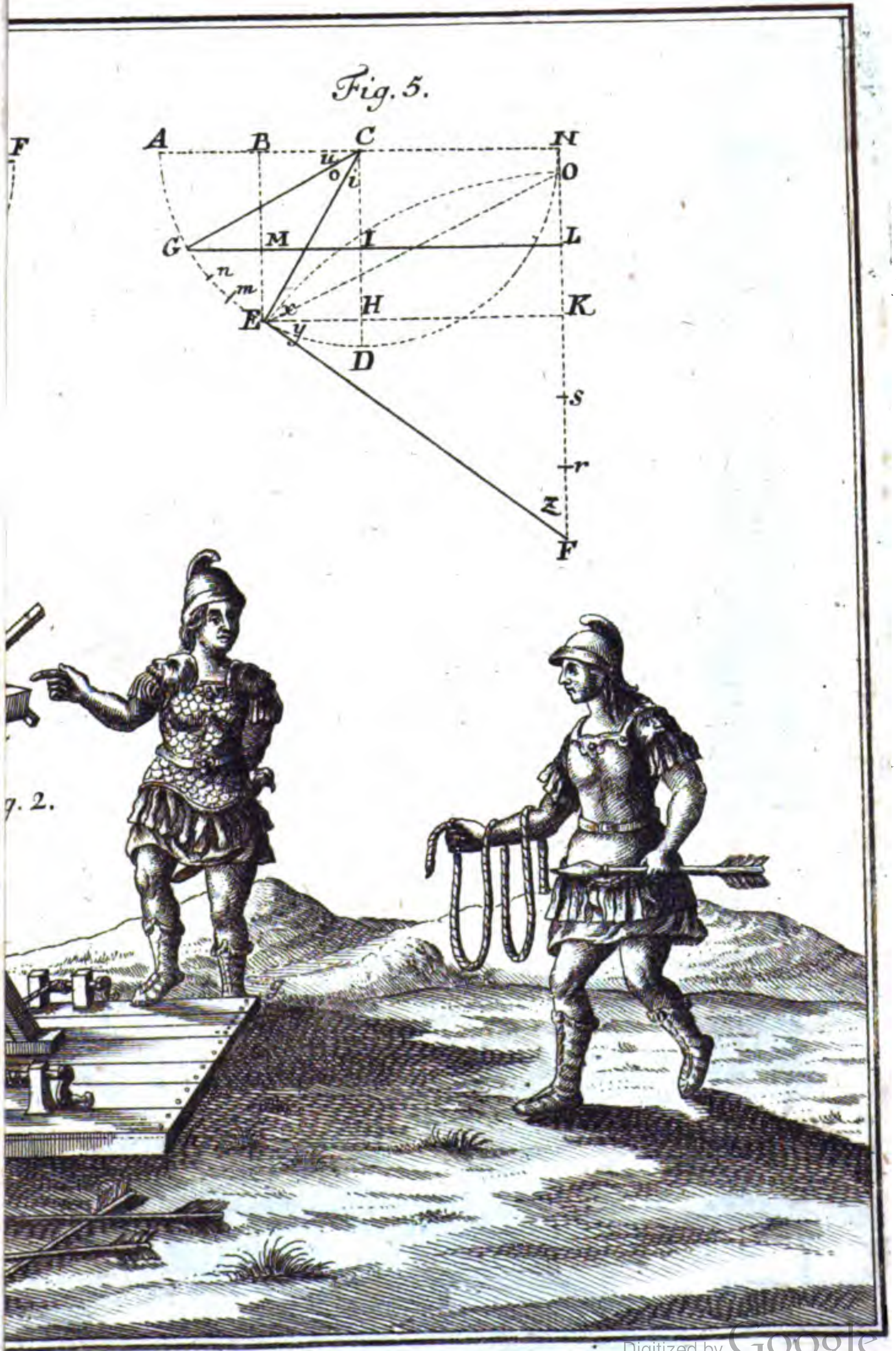
Que si vous ajoutez au côté EK la différence des sinus ϕ & x, la longueur de la moitié de la zone sera déterminée, & la zone s'accordera parfaitement avec toutes les conditions de la demande, puisque $EF = GL$, $EK = LF$, KF & EK sont normales l'une à l'autre & que $E = 97\frac{1}{2}°$.

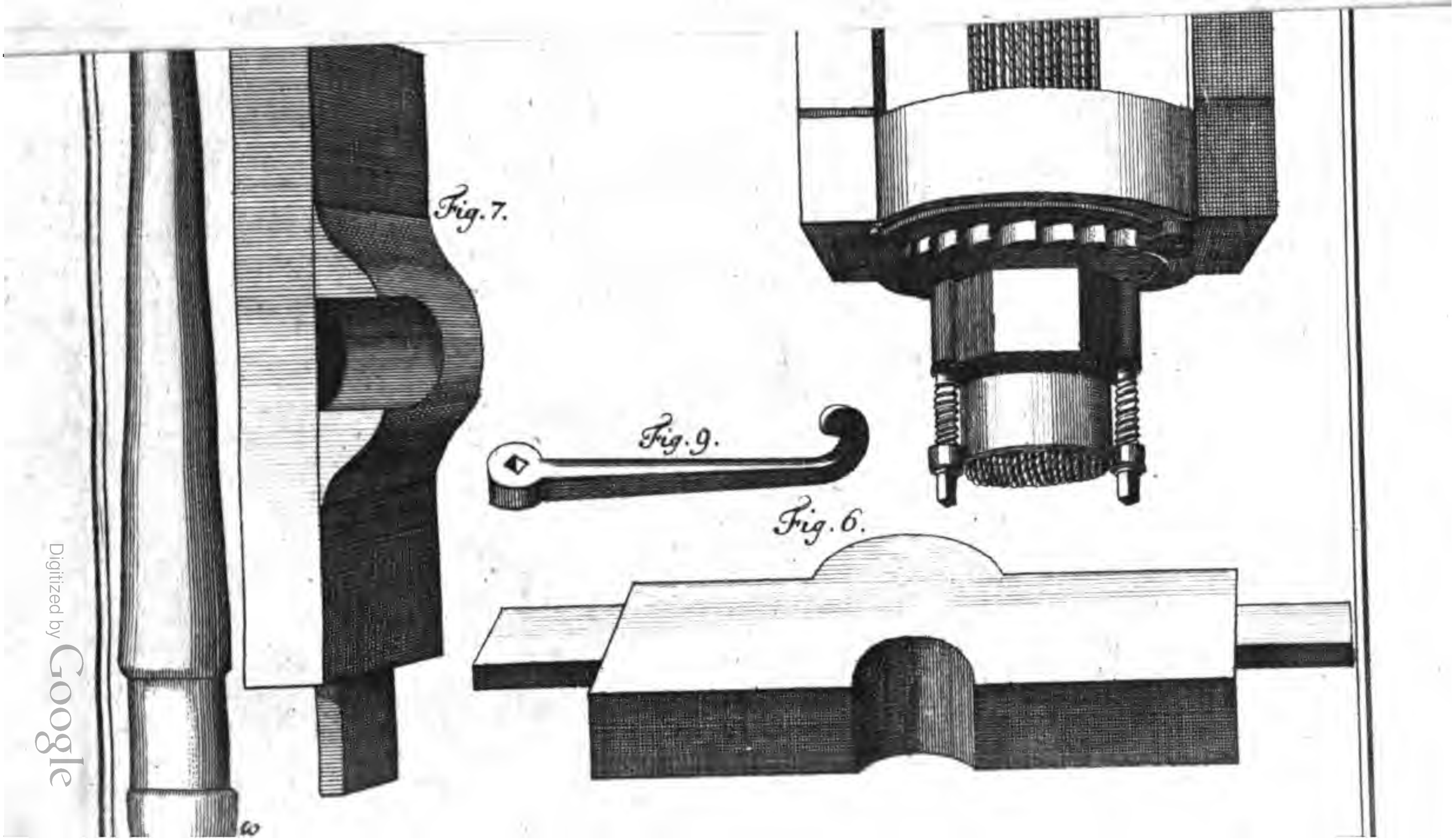
COROLLAIRE.

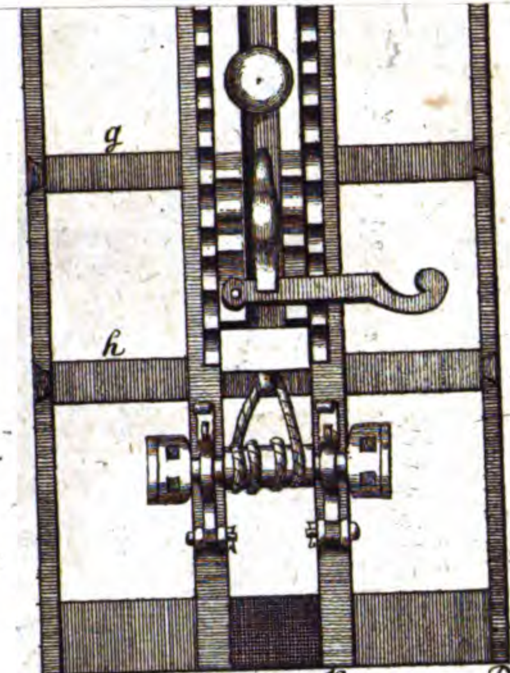
Divisez l'arc GE en trois parties égales, m, n, & G, & de chaque point transportez la demi-zone dans la ligne de direction LF, en remarquant le contact r & s. Cela étant fait, la ligne Fr détermine le rapidité de la zone. Si le bras parcourt l'espace EZ, & rs, sa vitesse après l'espace parcouru est désignée par mn, enfin sL marque la vibration, le bras transmettant la troisieme partie, nG. La zone accélere donc le globe avec une rapidité qui va en croissant. Cet art singulier d'accélérer successivement la vitesse du globe est d'une

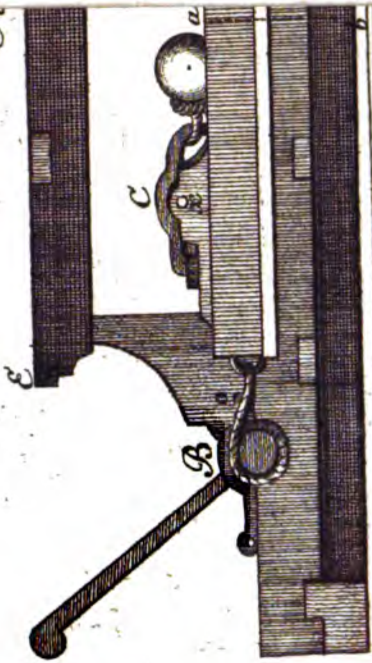
si


Fig. 7.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
o
o
b
g
q
r
w
w
s
t
b
f
h
d
B
E
F
f
g
h
a
o
V
S
S3 -S- V S


Fig. 5.
A
B
C
N
O
u
o
i
G
M
I
L
n
m
E
x
y
H
K
D
s
r
z
F


Fig. 7.
Fig. 9.
Fig. 6.





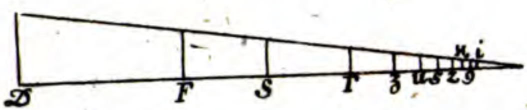
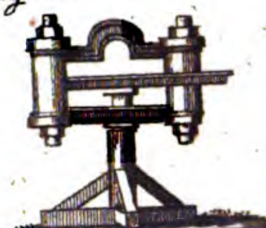
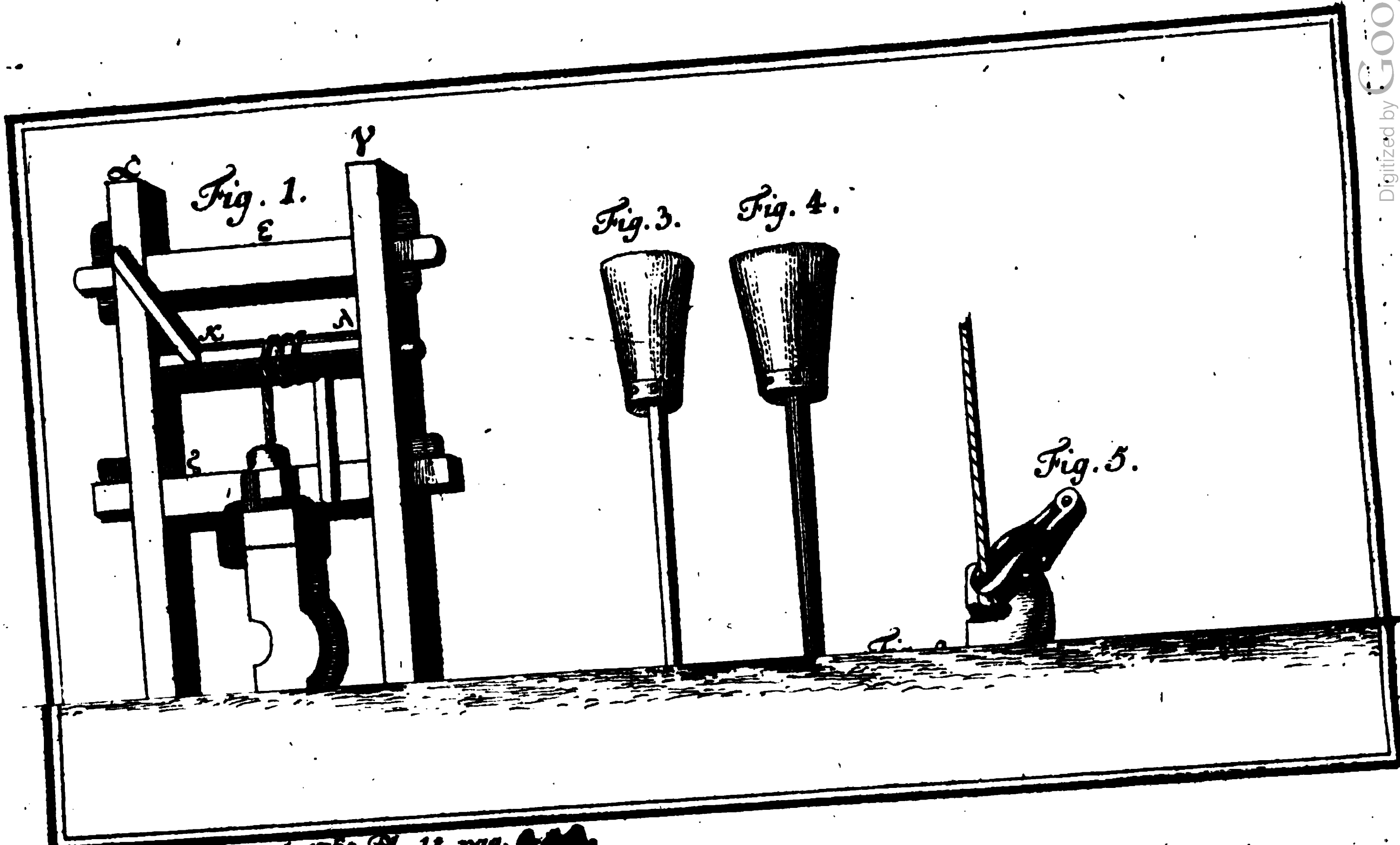


Fig. 6.





Mem. de l'Acad. 1760. Pl. 11. pag.

si grande importance, que sans lui aucune force de cordes, aucune structure de bras ou de quelque autre piece que ce soit, ne peut procurer au globe l'extrême rapidité avec laquelle il est emporté par une espace de trois stades & au delà.

CONCLUSION.

Je m'étonne, & je crois qu'on a sujet de s'en étonner, du degré de sagacité auquel l'esprit des Anciens s'est élevé dans l'art balistique qu'ils avoient poussé à une telle perfection qu'on ne trouve aujourd'hui rien à suppléer ni à corriger dans la construction de leurs Machines.

Ainsi, si l'on se proposoit d'augmenter à présent la force ou la rapidité de machines semblables, il faudroit recourir, non à la structure, mais à l'élasticité des cordes. Ces cordes sont l'ame de la baliste; plus elles sont foibles, plus l'action d'une baliste, de quelque ordre qu'elle soit, est rallentie.

Au reste, mes recherches peuvent mener à des usages importans dans les arts méchaniques. Nous manquons de matieres élastiques qui puissent résister à des poids de quintaux. Nos aciers, fussent-ils fabriqués par Vulcain & par les Titans, romproient au premier choc. Les poutres occupent non seulement un trop grand espace par leur masse, mais il n'y a aucune maniere de les gouverner. Le genre d'élasticité que l'on indique ici peut être employé avec succès par tous les Méchaniciens; toutes les autres forces lui sont inférieures; la rapidité & la vitesse peuvent y être également poussées à leur plus haut point: on est le maître de les placer à son gré partout où l'on en a besoin; & quand ces forces défaillent, quelques tours de barillet les rétablissent sans perte de tems & sans fraix. Je conseille donc aux Architectes, aux Tourneurs, aux Fondeurs, à ceux qui polissent les meules, &c. de faire revivre cet art; & je crois leur recommander par là le vrai Palladium de toute la Méchanique ancienne.

ELOGE

DE

M. LE MARECHAL DE KEITH *).

L'*Ecosse* a été jusqu'en 1706 un Royaume entierement séparé de l'*Angleterre*, quoique depuis 1603 les Rois d'*Ecosse* fussent montés sur le Trône d'*Angleterre*. Il y avoit donc en *Ecosse* toutes les grandes Charges qui se trouvent dans un Royaume, & entr'autres celle de Maréchal. Dès le tems du Roi MALCOLME III. & par conséquent depuis plus de 700 ans, cette Charge étoit dans la Maison de KEITH, comme héréditaire, & appartenant toujours à l'aîné de cette Famille, dont l'origine remonte encore à des tems fort antérieurs. Il faut bien distinguer ces Maréchaux héréditaires du Royaume d'avec les Maréchaux de la Cour, qui sont toujours à la nomination de celui qui gouverne. Sans cette distinction on seroit embarrassé en trouvant dans l'Histoire, qu'il est quelquefois fait mention en même tems de deux Maréchaux différens pour l'*Ecosse*; l'un est alors celui du Royaume, & l'autre celui de la Cour. Il n'est pas besoin de s'étendre davantage sur les prérogatives d'une Maison aussi ancienne, & en possession d'une semblable Dignité. Le Roi JAQUES II. y ajouta en

*) Cet Eloge n'a pas été lû à l'Académie. Lorsqu'après la mort de M. le Maréchal, je pensai à m'acquitter de cette tâche, l'une des plus indispensables dans ce genre, M. *de Maupertuis* écrivit à Mylord *Maréchal* pour le prier de me fournir des matériaux. Ce Seigneur répondit que tout ce qu'il savoit & pouvoit dire de son Frere, se réduisoit à ceci: *Probus vixit, fortis obiit.* Ne pouvant mettre sur ce beau fonds une broderie purement imaginaire, je renonçai à la composition de cet éloge. Mais M. *Pauli*, Professeur de Halle, s'étant mis à publier les Vies des principaux Capitaines morts dans le cours de la derniere Guerre, celle de M. *de Keith* que j'y trouvai, me fit reprendre mon dessein: & en voici l'exécution, à laquelle je crois devoir ménager une place dans nos Mémoires. On se souviendra que M. *Pauli* est mon garant pour tous les faits.

en 1458. le titre de Comte. *Guillaume*, Comte *Marshall*, Lord *Keith* & *Altrée*, (ces derniers noms sont des Pairies avec les domaines qui en dépendent,) épousa Lady *Marie Drummond*, fille du Comte de *Perth*, & en eut 1. Lady *Keith*, qui fut mariée au Comte *de Wigton*, & a laissé une fille qui est mariée avec Milord *Elphingston*; 2. Lady *Anne Keith*, Epouse du Comte de *Galloway*, de la Maison de *Stuart*, dont il reste aussi une fille, mariée au Marquis de *Seafort*; 3. *George*, Comte *Marshall* d'*Ecosse*, Lord *Keith* & *Altrée*, Gouverneur-Général pour le Roi de *Prusse* des Principautés de *Neufchâtel* & *Vallengin*, qui est actuellement en *Espagne*, chargé de négociations très-importantes; 4. JAQUES KEITH, dont il s'agit ici.

Il nâquit en *Ecosse* l'an 1696, & ayant un frere il porta simplement le nom par lequel on vient de le désigner, les titres de la Famille appartenant exclusivement à l'ainé dans plusieurs Etats de l'*Europe*. Le jeune *Keith* fut élevé avec soin, & on lui fit apprendre de bonne heure les choses qui convenoient à son état. Il sçavoit le *Latin* avant que de sortir de la maison paternelle, & il alla ensuite à *Aberdeen*, où il y a un College qui avoit été fondé par son Ayeul. A l'âge de dix-neuf ans le son de la trompette guerriere lui fit quitter les douceurs du commerce des Muses.

Ici se présente dès l'entrée une conjoncture importante qui a décidé du reste de sa vie. L'*Angleterre* & l'*Ecosse*, comme nous l'avons déja remarqué, étoient des Royaumes séparés, qui avoient chacun son Parlement, & dont les sujets jouïssoient des privileges nécessaires pour maintenir cette liberté dont les Insulaires de la *Grande Bretagne* sont si jaloux. Ce qu'il y a de plus fâcheux, c'est que les droits des Princes & ceux des Peuples n'y sont pas exactement déterminés; ce qui les met dans un conflict perpétuel. Une des questions, par exemple, les plus délicates, c'est de sçavoir, si les sujets ont droit de se mêler dans ce qui concerne la succession au Trône? On a dit & écrit une infinité de choses là-dessus, sans parvenir à aucune décision; & l'on peut avancer que tous les troubles auxquels l'*Angleterre* a été

exposée depuis près d'un siecle, procédent de cette source. On pourroit remonter même plus haut, & rapporter à la même cause la mort tragique de CHARLES I. Les effets de cette cause ont duré jusqu'aux menées du *Prétendant* en *Ecosse*, & aux mouvemens qui troublerent ce Royaume en 1715.

Les deux Freres *Keith*, séduits sans doute par quelques préjugés de Nation, ou entraînés par des intérêts de famille, entrerent dans le parti de *Stuart*. Ils ne firent en cela que suivre l'exemple de plusieurs Pairs, qui épouserent la même cause, dès que le Comte *de Marr* eut répandu un Manifeste pour les y inviter. Les Mécontens rassemblerent une Armée de vingt mille hommes, & s'emparerent avec rapidité de *Perth*, de *Dundée*, d'*Aberdeen*, & d'*Inverness*. Leur Camp étoit devant la premiere de ces Villes. L'Armée du Roi commandée par le Duc d'*Argyle* posa le sien près de *Sterling*, pour couper aux Mécontens la communication avec l'*Angleterre*. *Marr* chercha vainement à faire quitter ce poste au Général *Anglois*, afin de se réunir au Comte de *Derwentwater*, qui avoit aussi formé un parti en *Angleterre*. Les *Ecossois* prirent encore au nom du *Prétendant* possession de quelques places sur la riviere de *Tay*; un parti de 1500 hommes tâcha même de surprendre *Edimbourg*, mais sans succès. *Hamilton*, qui les commandoit, au défaut de la Capitale, prit *Leith*. *Argyle* étoit embarrassé, & n'osoit presque faire aucun mouvement, dans la crainte que *Marr* n'en profitât pour occuper l'important poste de *Sterling*. Celui-ci reçut même un renfort de 6000 hommes, que lui amenerent *Gordon*, & le Comte de *Seafort*; après quoi, se trouvant supérieur à l'Armée Royale, il tira vers *Dumblain*, pour s'assurer du passage de la Riviere de *Forth*, & se joindre à un Corps d'Armée qui étoit dans le *Northumberland*. *Argyle* voulut le prévenir, & arriva en effet le 22 Novembre à *Dumblain*, sur lequel sa gauche étoit appuyée, & sa droite sur des marais près de *Sheriff*. Ces marais étant venus à geler, le Comte *de Marr* prit la résolution d'attaquer l'aile droite, mais la vigilance de son Ennemi le prévint; il fut lui-même attaqué, & après une vigoureuse résistance, mis en fuite, & poussé jusqu'à la Ri-

Riviere d'*Almi*. Les Mécontens étoient en même tems aux prises avec l'aile gauche de l'Armée Royale, & avoient un plus heureux succès. C'étoit là que le jeune *Keith* combattoit. On renversa l'Infanterie sur la Cavalerie, & les *Ecossois* se faisant jour pendant ce choc, couperent l'aile gauche d'avec la droite. La nuit sépara les combattans; & le Comte *de Marr* abandonnant le champ de bataille se retira vers *Addrok*. Les affaires des Mécontens prirent encore un plus mauvais tour en *Angleterre*. Après avoir pénétré dans le Comté de *Lancaster*, ils se virent enveloppés de toutes parts par les forces du Roi, & se retirerent à *Preston* où ils furent attaqués le 22 Novembre, & obligés de se rendre tous à la merci du Roi. C'est ainsi qu'un seul jour dissipa tous les efforts de ce Parti. *Marr* se tenoit encore dans son Camp de *Perth*, mais ses Troupes s'y fondoient, tandis que celles d'*Argile* recevoit un renfort considérable de *Hollandois*. Le *Prétendant* s'étant embarqué à *St. Malo*, arriva le 2 Janvier 1718 à *Petershead*, dans le Comté de *Buchan*, d'où il se rendit au Camp de *Perth*, mais sans armes, sans argent, & sans troupes. La communication avec l'*Angleterre* étant interdite, personne ne vint le trouver; au contraire le Comte de *Seafort* & le Marquis de *Huntley* le quitterent avec les montagnards, & il se trouva comme assiégé dans le Camp. Le Général *Cadogan* ayant donné au Duc d'*Argyle* le conseil de l'y attaquer, *Stuart* se retira à *Dundée*, & de là à *Montrose*, d'où il s'échapa le 12 Fevrier, & s'enfuit sur le même vaisseau qui l'avoit amené, laissant ainsi les biens, l'honneur, & la vie de ses partisans à la discrétion des Vainqueurs. Ils se séparerent aussitôt, & chacun pensa à sa sûreté. Le Comte *de Marr*, Mylord *Marshall*, & M. *de Keith*, abandonnerent leur Patrie. Il étoit difficile de trouver un azyle, presque toutes les Puissances de l'*Europe* étant en paix & en alliance avec le Roi GEORGE I. La *France* elle-même, depuis la mort de LOUIS XIV, étoit dans des principes très desavantageux au *Prétendant*. Le Duc Régent n'avoit garde de rompre avec l'*Angleterre*, qui pouvoit seule l'aider à monter sur le Trône en cas de vacance. A peine le Pape osa-t-il permettre à *Stuart*, de se réfugier, d'abord à

 Avignon,

Avignon, & ensuite à *Urbin*. Ses adhérens vinrent le trouver dans cette derniere Ville, en attendant que le sort s'adoucît en leur faveur. CHARLES XII. Roi de *Suéde*, animé d'un désir de vengeance contre GEORGE I. étoit leur Protecteur. Il leur promit de rétablir le Chevalier de St. *George*, à la tête d'une Armée *Suédoise*. Les mesures prises par *Gyllenbourg* à *Londres*, & par *Görtz* à *la Haye*, l'auroient peut-être mis en état de tenir sa parole, si la trame n'avoit été découverte en 1717, & les deux Emissaires arrêtés; ce qui fit avorter tout le projet. Qui sçait pourtant encore ce que l'ALEXANDRE du *Nord* auroit tenté, sans le coup mortel qui l'atteignit devant *Friderickshall* en 1718? Il ne restoit plus de ressource aux *Jacobites*, lorsqu'*Alberoni* parut sur la scene. Ce Ministre engagea l'*Espagne* à déclarer la Guerre à l'*Angleterre*; & Mrs. *Keith* n'eurent rien de plus honorable & de plus avantageux à faire que d'aller servir dans les Troupes *Espagnoles*, invités par *Alberoni*, qui leur promettoit, & à chacun de même parti, de les faire passer de là en *Ecosse*. Le *Prétendant* alla d'*Urbin* à *Rome*, & feignoit de vouloir établir son domicile à *Boulogne*, où il envoya les Comtes *de Marr* & *de Perth*, avec *Paterson*, qui étoit destiné à représenter sa personne. Pour lui, échapant à la vigilance des *Allemands*, qui le gardoient dans les Etats du Pape, il vint à *Nettuno*, & se rendit de là à *Cagliari*, dans l'Isle de *Sardaigne*, qui étoit alors au pouvoir des *Espagnols*. De là il prit la route de *Catalogne*, & il étoit à *Roses*, le 19 Mars, 1719. Arrivé à *Madrit*, il fut reconnu Roi de la *Grande-Bretagne*. La Flotte appareillée pour lui étoit partie dès le 7 Mars. Elle consistoit en dix Vaisseaux de guerre, & plusieurs Vaisseaux de transport, qui avoient à bord 6000 Soldats, la plûpart *Irlandois*. On avoit fourni des armes pour 15000 hommes, & le Duc d'*Ormond*, avec le titre de Capitaine général du Roi d'*Espagne*, commandoit toute l'entreprise, à laquelle PHILIPPE V. accordoit son nom.

La Providence avoit résolu de conserver aux *Anglois* leur Roi légitime, leurs Libertés, & leur Réligion. Une tempête près du Cap de *Finisterre* fut suffisante pour dissiper les projets des *Espagnols*, & la prudence du Roi GEORGE mit les côtes à l'abri d'une descente.

Les

Les *Espagnols* furent malheureux partout; & les *Anglois*, sous la conduite de *Cobham*, prirent *Vigos*. Quelques soulévemens en *Ecosse* furent bientôt reprimés, & les Seigneurs qui les avoient excités, obligés à prendre la fuite. Ces mauvais succès causerent la chûte du Cardinal *Alberoni*; & en 1720 il y eut une Alliance conclue entre l'*Espagne* & l'*Angleterre*.

Il falut donc que le Chevalier de *St. George* cherchât une autre retraite. Quelquesuns de ses partisans le suivirent. Mais Mylord *Marshall* & M. *de Keith* prirent une autre parti. Convaincus que toutes les tentatives en faveur du *Prétendant* ne pouvoient conduire à aucune réussite, & lui ayant donné tous les témoignages d'attachement qu'il pouvoit attendre de leur fidélité, ils crurent avec raison qu'ils n'étoient pas obligés à se sacrifier sans fruit, & pour une cause désespérée. Philippe V. qui connoissoit le mérite & la capacité de ces deux freres, leur offrit de l'emploi dans ses Troupes, & ils l'accepterent. L'*Europe* étoit alors en paix, mais on avoit lieu de s'attendre à voir bientôt recommencer la guerre. Le Congrès de *Cambray*, destiné à régler les prétentions de toutes les Puissances, ne servoit qu'à en faire naître de nouvelles. Celles surtout de l'Empereur Charles VI. & du Roi d'*Espagne* ne pouvoient être conciliées. Celui-ci se fortifia par l'alliance de l'*Angleterre* & de la *France*, & fiança l'Infante au jeune Louis XV. L'Empereur aliéna encore les *Hollandois* par l'érection de la *Compagnie d'Ostende* faite en 1722. L'abdication de Philippe V. en 1724 fut de courte durée par la mort du Prince auquel il avoit remis le Sceptre. L'année suivante Louis XV. au lieu d'épouser l'Infante qui lui étoit destinée, prit la Fille du Roi Stanislas, ce qui brouilla entierement les Cours de *France* & d'*Espagne*. Celle-ci s'unit à la Maison d'*Autriche*; & le Duc *de Ripperda* conclut à *Luxembourg* un Traité, auquel accéda ensuite l'Impératrice Catherine de *Russie*. Toutes les négociations de *Cambray* furent infructueuses, & l'*Europe* avoit les yeux ouverts sur les grands évènemens auxquels on avoit lieu de s'attendre. L'Alliance conclue à *Hanovre* rétablit l'équilibre, que celle de *Luxembourg* avoit

avoit rompu. L'*Angleterre* équipa diverses Flotes, & les *Espagnols* commencerent les hostilités par le siège de *Gibraltar*. Les flammes de la guerre auroient causé le plus grand incendie, sans les inclinations pacifiques du Cardinal *de Fleury*. Il proposa un nouveau Congrès, qui devoit d'abord être tenu à *Aix*, mais qu'on transfera à *Soissons*, pour faire plaisir à cette Eminence.

Les espérances de M. *de Keith* s'évanouissoient de nouveau par le retour de la paix. Avec cela son avancement en *Espagne*, où il étoit déjà parvenu au rang de Colonel, étoit à peu près impossible à cause de sa Religion. Il étoit *Protestant*. La Cour lui fit même déclarer formellement, que tant que cet obstacle subsisteroit, il ne pourroit recueillir le fruit de ses services. Il ne crut pas devoir céder à un semblable motif, & il aima mieux chercher un autre climat, où les qualités militaires décidassent seules du rang d'un Officier. Il se détermina pour celui de *Russie*, & ne demanda d'autre récompense à la Cour de *Madrit* qu'une recommendation pour celle de *Petersbourg*. On peut juger qu'il l'obtint aisément, & elle fut conçue dans les termes les plus forts. Aussi l'Empereur lui donna-t-il sur le champ le Brevet de Général Major, qu'il reçut encore à *Madrit*.

Arrivé en *Russie* en 1729. M. *de Keith* gagna d'abord les bonnes graces du jeune Souverain PIERRE II. qui lui donna la Lieutenance-Colonelle d'un nouveau Régiment des Gardes, qui venoit d'être levé, & dont le Comte *de Löwenwolde* étoit Colonel. Il se conduisit si bien dans ce poste, qu'il fut fait Colonel au départ de celui qui l'étoit. La révolution qui arriva bientôt après, ne fit pas le moindre tort à son avancement, parce qu'il fit toujours le devoir d'un brave Officier, sans se mêler dans aucune intrigue d'Etat. ANNE IVANOWNA, qui monta sur le Trône après la mort de PIERRE II. arrivée en 1730. le confirma dans tous ses Emplois, quoique l'Empire *Russe* fût en paix. Dès l'an 1733. elle eut sujet de se féliciter d'avoir gardé M. *de Keith* à son service. L'Election au Trône de *Pologne* donna lieu à une guerre, dans laquelle la *Russie* prit le parti d'AU-

GUSTE,

GUSTE, Fils du Roi qui venoit de mourir, contre STANISLAS. Le Général *Lascy* eut ordre d'entrer en *Lithuanie* avec une Armée; & lorsque STANISLAS eût été élu le 12 Septembre, les Troupes *Russes* pénétrerent en *Pologne*. M. *de Keith* servoit sous son digne compatriote, & avoit toute sa confiance. Les *Russes* forcerent STANISLAS & ses adhérens à s'enfuir de *Varsovie* le 22 de Septembre, & à passer la *Vistule*. Le 5 d'Octobre une nouvelle élection se fit en faveur d'AUGUSTE. Le 9. l'Armée de *Lascy* passa le Fleuve sur un pont de bateaux, & le 10 elle entra dans *Varsovie*. On laissa 15000 hommes en *Pologne* sous le commendement de *Lubras*, & *Lascy* avec le reste de l'Armée entra en *Prusse*. *Thorn* fut assiégé le 17 de Janvier, *Dantzig* investi en Février, & *Munich* se rendit devant cette derniere Ville en Mars. La tranchée fut ouverte le 20. La Ville de *Dantzig* fit tout ce qu'elle put pour la défense de STANISLAS; mais, ayant été mal soutenue par la *France*, ce Prince fut obligé de s'échaper, & la Ville se rendit à composition le 7 de Juillet. M. *de Keith* se distingua beaucoup pendant ce siége. Aussi fut-il déclaré Lieutenant-Général au mois de Novembre 1734.

La Guerre d'*Allemagne* suivit celle de *Pologne*, & l'Impératrice ANNE envoya 14000 hommes au secours de ses Alliés en 1735; *Lascy* les commandoit encore; & *Keith* étoit immédiatement au-dessous de lui. Mais, avant qu'ils eussent pu agir, la Paix se négocioit à *Vienne*, & fut conclue le 3 d'Octobre 1735. L'Armée *Russe* s'en retourna, prenant sa route par l'*Ukraine*, où d'autres Troupes de la même Nation s'étoient déjà rendues en 1735. *Munich* en prit le commandement en Mars 1736, & commença les opérations de la guerre contre les *Tartares* avant que *Lascy* & *Keith* fussent arrivés.

La cause de cette guerre consistoit dans le peu d'attention que la *Porte* avoit fait aux plaintes réitérées de la Cour de *Russie* sur les incursions & les brigandages des *Tartares*. N'ayant obtenu aucune satisfaction, elle résolut de se la procurer à main armée. Avant la fin de Mars 1736, *Munich* étoit devant *Asoph*. Les *Tartares* s'étant appro-

prochés pour secourir la Place, *Munich* alla à leur rencontre, laissant le commandement du siége au Général *Lewaschew*. Pendant ce tems-là *Lascy* se rendit devant *Asoph*, où il étoit le 4 de Mai. Ayant l'ancienneté sur *Lewaschew*, il prit le commandement, fit ouvrir la tranchée, & une bombe ayant mis le feu le 19 Juin au Magazin à poudre, le Commandant fut obligé de se rendre le lendemain. *Munich* de son côté battit les *Tartares*, força leurs lignes à *Précop*, & obligea cette Place à se rendre à discretion le 19 de Mai. Ce Général entra tout de suite dans la *Crimée*, où il livra des combats qui se renouvelloient presque tous les jours. Après avoir encore pris en Juin *Koslow* & *Baciesaray*, il revint à *Précop* le 7 Juillet, fit raser cette Place avec ses lignes des *Tartares* le 7 d'Août, & revint en *Ukraine*. Le 16 de Septembre, il passa la riviere de *Samara*, & mit ses Troupes en quartier d'hiver le long du *Dnieper*. S'étant rendu le 19 de Septembre à *Petersbourg*, il remit à M. *de Keith* le commandement en chef de toutes les Troupes *Russes* qui étoient dans l'*Ukraine*. C'étoit le charger d'une des commissions les plus pénibles qu'on puisse imaginer; & qui demandoit toute la prudence & toute l'expérience du plus habile Général. Il eut à préserver les Soldats d'une maladie contagieuse qui faisoit alors de grands ravages, à les mettre à couvert des courses perpétuelles des *Turcs* & des *Tartares*, & à les équiper de tout ce qui étoit nécessaire pour la campagne prochaine. M. *de Keith* étoit peut-être le seul homme au monde qui pût remplir cette tâche; & il le fit si bien que tout étoit prêt pour ouvrir la campagne de 1737 beaucoup plutôt que de coutûme, si la durée d'un froid violent ne s'y étoit opposée.

Munich se rendit à l'Armée en Mars 1737, & le Prince ANTOINE ULRICH DE BRUNSWICK l'accompagna. Le Général en chef se chargea de la guerre contre les *Turcs*, & laissa à M. *de Lascy*, le soin de combattre les *Tartares*. M. *de Keith* fut employé dans la grande Armée de *Munich*. Ayant passé le *Dnieper* au commencement de Mai, & le *Bog*, (ou l'*Hypanis*,) le 20 de Juin, elle alla mettre le siege devant *Ockzakow*, où il y avoit une garnison de 20000

hommes.

hommes. *Löwendahl* l'investir le 30 de Juin, & les travaux furent poussés avec beaucoup de vigueur. La Place fut prise d'assaut le 2 de Juillet. M. *de Keith* s'exposa continuellement dans cette occasion, aussi fut-il dangereusement blessé; & cela le mit hors d'état de servir le reste de la campagne, pendant lequel il ne se passa non plus rien d'important. *Munich* se rendit devant *Bender*; mais les *Turcs*, qui ne vouloient pas en venir à une bataille décisive, avoient fait le dégât dans le païs; ce qui, joint à la saison avancée, obligea de ramener l'Armée, qui au commencement d'Octobre revint prendre ses quartiers d'hiver le long du *Dnieper*. Les *Turcs* voulurent reprendre *Ockzakow* au milieu d'Octobre, mais la belle résistance du Général *de Stoffel* fit avorter leur dessein. L'Armée commandé par *Lascy* fit des progrès étonnans en *Crimée* pendant cette campagne, & la Flotte *Russe* fut aux prises avec celle des *Turcs*.

Les blessures de M. *de Keith* le tinrent hors du service pendant le reste de cette guerre. La campagne de 1738. fut malheureuse pour les *Russes* de tous côtés. Les *Tartares* à la vérité ne purent pas empêcher *Lascy* de pénétrer en *Crimée*; mais *Munich* perdit beaucoup de monde, & fut obligé d'abandonner *Oczackow*, après avoir fait sauter les ouvrages. L'Amiral *Brodel* vit périr presque toute sa Flotte, & cela obligea *Lascy* de sortir de la *Crimée*. L'année 1739 fut un peu plus favorable. *Munich* prit une autre route, battit les *Turcs* près de *Choczim*, passa le *Pruth*, prit *Jussy* & toute la *Moldavie*; & pendant ce tems-là *Lascy* rentra pour la quatrieme fois en *Crimée*. Tout cela fut pourtant inutile, parce que l'Empereur CHARLES VI. allié de la *Russie*, fut forcé par une suite de revers à conclure la Paix de *Belgrade*; & les *Russes*, dans la nécessité d'y accéder, rendirent tout ce qu'ils avoient conquis *).

*) Parmi les oeuvres mêlées du Comte *Algarotti*, on trouve un *Saggio di Lettere sopra la Russia*. Ces Lettres ont été écrites dans le cours de l'année 1739. M. *Algarotti*, qui fit alors le voyage de Russie, les adressoit à Milord *Harvey*. Dans la cinquieme de ces Lettres, il lui parloit de quatre Généraux du premier ordre que la Russie possédoit alors; Mrs. *de Löwendahl*, *de Keith*, *Lascy* & *Munich*. Ce qu'il

La santé de M.r *de Keith* étant toujours dérangée, il alla chercher à se rétablir en *France*. Il y a lieu de croire qu'il étoit aussi chargé de quelques affaires d'Etat, relativement à la guerre qui se préparoit entre la *Suede* & la *Russie*. Ce qu'il y a de certain, c'est qu'il eut ordre de passer, dès que ses forces le lui permettroient, de *France* en *Angleterre*, & d'y traiter des affaires dont on vient de parler. Il arriva à *Londres* en Fevrier 1740, & fut présenté le 5 du mois à Sa Majesté qui le reçut fort gracieusement. On ne vit plus en lui le rebelle de *Preston:* il fut reçu comme un grand Général, & comme le Ministre d'une grande Puissance. De son côté il témoigna qu'il reconnoissoit GEORGE II. pour Souverain légitime, & la Succession de la Maison d'*Hanovre* comme la seule fondée en droit. Le 14 de Mai il eut son audience de congé, mais il resta encore quelque tems à *Londres*.

Sur ces entrefaites la Paix entre la *Russie* & la *Porte* fut conclue, & célébrée à *Petersbourg* le 25 de Février avec de très grandes solemnités. L'impératrice fit des présens considérables à tous ceux qui s'étoient distingué pendant la guerre; & M. *de Keith*, quoiqu'absent, ne fut pas oublié: il eut une épée d'or de la valeur de 5000 Roubles. On ne crut pas ses services assez récompensés par là; & au mois de Mars il eut le Gouvernement de toute l'*Ukraine*. Etant parti le 18 Mai de *Londres*, il vint d'abord à *Petersbourg*, d'où il se rendit au mois de Juillet dans la Province qui lui étoit confiée.

L'Impératrice ANNE mourut le 28 d'Octobre 1740, & sa mort eut des suites importantes. Tout plia sous *Biron*; il n'y eut que Mrs. *de Keith* & *Donduc-Ombo* qui firent difficulté de reconnoître son autorité. Le Gouverneur de l'*Ukraine*, fort chéri des peuples nombreux qui éprouvoient sous lui des douceurs qui leur avoient été jusqu'alors inconnues, ne pouvoit pas être réduit par la force, d'au-

tant

qu'il dit de M. *de Keith*, mérite de trouver place ici: & ce peu de lignes vaut un éloge des plus étendus: *Keith, uomo di posatissimo giudizio, che con la dolcezza ha ottenuto degli ufficiali Russi più sommissione, che qualunque altro con la severità, che in mezzo all'armi non ha punto trascurato le lettere, e congiunge con la pratica delle guerra la teoria più ragionata, e più profonda.*

tant plus qu'il respectoit l'autorité de l'Empereur Iwan, & ne déclinoit que celle de son Tuteur. M. *de Keith* n'eut pas longtems à demeurer dans cette situation; l'autorité de *Biron* ne dura que vingt-deux jours, au bout desquels la Mere du jeune Empereur prit les rênes du Gouvernement. Cette révolution maintint notre Gouverneur dans son poste.

Une nouvelle guerre avec la *Suede* qui parut inévitable à la Régente, rendit M. *de Keith* nécessaire, & il reçut encore une épée plus précieuse que la précédente. La *Suede* en effet publia sa déclaration de guerre au commencement du mois d'Août, & à la fin du même mois la *Russie* en fit autant; mais, par une prérogative du pouvoir despotique, la *Russie* fut bien plutôt prête à entrer en campagne que la *Suede*. Le Feld-Maréchal *Lascy* parut devant *Wibourg* à la tête de 30000 hommes. Il avoit dans son Armée les meilleurs Généraux, au premier rang desquels M. *de Keith* méritoit incontestablement d'être mis. Une partie de l'Armée *Russe* alla attaquer le 3 de Septembre l'avantgarde *Suédoise*, commandée par *Wrangel*, & retranchée sous le canon de *Wilmanstrand*. Les *Suédois* combattirent comme des lions, mais les *Russes* ne montrerent pas moins de courage, & demeurerent vainqueurs. M. *de Keith* fit des prodiges; & la Cour qui en fut instruite, prit cette occasion pour augmenter considérablement ses revenus annuels.

Après cette Action, *Lascy*, maître de *Wilmanstrand*, revint devant *Wybourg*; mais s'étant rapproché avec le gros de l'Armée de *Petersbourg*, il laissa *Keith* devant cette Place avec le reste des Troupes, ayant sous lui les Généraux *Stoffel* & *Fermor*. On ne pouvoit lui témoigner plus de confiance que de le laisser exposé à toutes les forces de *Suede*, qui s'approchoient pour faire lever le siege de *Wybourg*.

Pendant ce tems-là, la Capitale de l'Empire *Russe* étoit le théatre d'une nouvelle révolution. Elisabeth, Fille de Pierre le Grand, monta sur le Trône le 25 de Novembre 1741. n. st. M. *de Keith* reconnut sans balancer cette nouvelle Souveraine; & à l'exem-

ple de *Lascy*, son ami & compatriote, il prêta le serment de fidélité. Bientôt après l'avénement d'ELISABETH, il y eut des négociations de Paix entamées entre la *Russie* & la *Suéde*; & pour les favoriser, on convint d'une treve. Mais, les prétensions des *Suédois* ayant paru trop fortes, dès que la trève fut expirée le 11 de Mars 1742, les hostilités recommencerent. Les *Russes* pénétrerent par trois endroits dans la *Finlande*, & y mirent tout à feu & à sang, quoique leur dessein fût de garder cette Province. Après divers mouvemens des Armées, celle de *Russie* entoura tellement le Camp *Suédois* à *Helsingfort*, que les Généraux ainsi renfermés furent obligés de conclurre une Convention le 4 de Septembre, par laquelle l'Armée *Suédoise* obtint la liberté de retourner par eau en *Suéde*, à condition que la *Carélie* & le *Nyeland* resteroient aux *Russes*. Ceux-ci firent encore plusieurs conquêtes avant que d'entrer en quartier d'hiver; & M. *de Keith* se rendit à tems à *Petersbourg*, pour assister aux réjouissances qu'y occasionnerent le 25 d'Octobre les heureux succès de cette campagne.

Il paroît que vers ce tems-là quelques uns des principaux Etrangers qui étoient au service de *Russie*, eurent des mécontentemens qui les obligerent de demander leur congé. Ce qu'il y a de certain, c'est qu'à la fin de cette année Mrs. *de Lœwendahl*, *Lieven*, *Duglas*, & quelques autres, voulurent se retirer. M. *de Keith* fut de ce nombre, & ce ne put être que par de très-fortes raisons, ayant été traité jusqu'alors avec tant de distinction, & la guerre n'étant pas encore finie. L'Impératrice fut touchée de sa perte, & tâcha de le conserver, en lui donnant l'*Ordre de St. André* (il avoit déja celui de *St. Alexandre*,) & en lui offrant le commandement en chef contre les *Perses*. M. *de Keith* s'excusa d'accepter cet emploi; mais il reçut l'Ordre avec reconnoissance, & consentit à demeurer au service de *Russie*: exemple qui fit tant d'impression sur les autres Généraux étrangers qu'ils le suivirent.

Les Armes *Russes* en profiterent. La Succession au Trône de *Suéde* fit naître des difficultés, qui traînerent en longueur par la voye

des

des négociations, & qui aboutirent enfin à une nouvelle guerre. Ce qui se passa en *Ostbothnie* entre le Général Suédois *Freudenfeld*, & le Général *Russe Stöffel*, ne fut pas de grande conséquence. M. *de Keith* se rendit au mois de Mars 1743 à *Abo*, & s'empara de l'Isle d'*Aland*, à dix-huit milles de *Stockholm*. La *Russie* résolut de faire une descente en *Suéde*, comme on en avoit fait en 1719 & 1729. *Lascy*, *Lewaschew* & *Keith*, eurent le commandement des Troupes qui étoient à bord des Galeres. *Keith* avec son Escadre fut le premier qui apperçut les Galeres *Suedoises*, mais le vent ne lui permit pas de les attaquer. Peut-être aussi que les négociations qui duroient toujours, empêcherent de pousser la guerre plus vivement. Cependant il y eut le 30 Mai un combat naval très sanglant entre l'Escadre de *Keith*, & celle de *Suéde* commandée par *Rayalin*. Le premier avoit eu la précaution de placer sur terre une batterie qui faisoit feu sur les Vaisseaux *Suédois*, & les foudroyoit. L'action dura jusques bien avant dans la nuit, & à la fin l'Escadre *Suédoise* fut obligée de se retirer. Là-dessus les Galeres *Russes* passerent devant la Flotte *Suédoise* entiere, & allerent en joindre d'autres qui étoient à la rade de l'Isle d'*Aland*. Cependant la *Russie* ne vouloit pas en venir aux dernieres extrémités avec la *Suéde*, de peur que le désespoir ne lui fit renouveller l'Alliance de *Calmar*, à quoi le Clergé & les Païsans étoient assez disposés, comme on pouvoit en juger par divers mouvemens qui s'excitoient en *Dalécarlie*. Afin de prévenir ce coup, l'Impératrice proposa pour succéder au Trône le Prince ADOLPHE FRÉDERIC DE HOLSTEIN-GOTTORP, alors Evêque de *Lubek*; & dans le dessein de mieux appuyer cette proposition, elle offrit de rendre presque toutes les conquêtes faites en *Finlande*. Comme la *Suéde* avoit un extrême besoin de la Paix, on en regla les Articles le 27 Juin 1743, & l'élection du Successeur au Trône se fit le 4 de Juillet suivant, à la satisfaction commune des Etats qui s'y intéressoient.

Le *Dannemarc* seul en paroissoit mécontent, & faisoit les plus grands préparatifs de guerre. La *Suéde* demanda du secours à la *Russie*. ELISABETH accorda dix mille hommes, & en donna le commandement

mandement à M. *de Keith*, qui avoit sous lui Mrs. *de Saltikow*, *Lapuchin* & *Stuart*. Le Général s'embarqua avec ses Troupes en *Finlande*, & vint au mois d'Octobre devant *Stockholm*. Le Roi Frederic vit passer en revue ce Corps d'Armée, & lui assigna des quartiers d'hiver. *Keith* entra dans *Stokkholm* avec les autres Généraux le 24 d'Octobre, & y fut traité avec beaucoup de distinction. Il étoit chargé d'une double fonction, de commander les Troupes, & d'être Plénipotentiaire de sa Souveraine à la Cour de *Suéde*. Il s'acquitta de l'une & de l'autre au contentement des deux Cours. Sa probité reconnue lui attiroit une pleine confiance de la part de tous ceux qui avoient à traiter avec lui. Mais aussi il ne pouvoit souffrir en d'autres la moindre trace d'obliquité; & dans quelques occasions il s'en est plaint hautement. Le Roi, & le Successeur désigné, s'empressérent à l'envi à témoigner leur estime à M. *de Keith*. Le jour de l'an, le Monarque lui fit présent d'une magnifique épée; & lorsqu'il prit son audience de congé, après avoir heureusement terminé toutes les affaires, le 23 de Juin, il reçut encore une épée, le portrait du Prince Successeur, & deux mille ducats. Les Troupes *Russes* reprirent le 4 d'Août la route de leur Païs, & l'Impératrice fit au Général pacificateur l'accueil le plus gracieux.

Lorsqu'en 1745 le Roi de *Prusse* entra en *Saxe*, pour prévenir les desseins que ses Ennemis avoient formé sur la *Silésie*, le Roi de *Pologne* implora le secours de la *Russie*, dont l'Impératrice fit assembler des Troupes en *Livonie* & en *Courlande*, afin qu'elles pussent avancer selon le besoin. M. *de Keith* en fut déclaré le Chef, ayant sous lui Mrs. *de Brilly*, *Soltikow*, *Lapuchin*, *Stuart* & *Brown*. La bataille de *Kesselsdorf* & la prise de *Dresde* eurent bientôt terminé cette guerre; & la *Russie* parut convaincue que le Monarque *Prussien* n'avoit fait que se servir des droits de la plus légitime défense. Cela n'empêcha pourtant pas que le Ministère *Autrichien* ne gagnât celui de *Russie*, & ne l'engageât en 1746 dans une Alliance contre la *Prusse*. Au mois de Juillet de la même année, Elisabeth avec toute sa Cour fit

un

un voyage d'apparat en *Livonie*, & arriva le 16 à *Narva*, où Elle fit la revue d'une partie de ses Troupes, M. *de Keith* étant à leur tête.

Mylord *Marshall* rendit en 1747 une visite à M. *de Keith* en *Russie*. Les deux freres prirent alors la résolution d'achever leur vie ensemble. M. *de Keith* s'y détermina d'autant plus volontiers, qu'il croyoit la *Russie* en paix pour une longue suite d'années. Cette Cour étant aussi dans les mêmes idées, eut moins de répugnance à se priver d'un Général qui lui avoit rendu de si grands services. M. *de Keith* demanda donc son congé, & l'obtint. Il quitta *Petersbourg*, passa par *Copenhague*, & se rendit à *Berlin*, où, dès le premier entretien, le Roi sentit tout le prix de l'acquisition qu'il pouvoit faire en sa personne. Il en saisit l'occasion avec d'autant plus d'empressement, que les deux Cours de *Russie* & de *Prusse* concevoient déjà de nouvelles défiances l'une de l'autre, & qu'il y avoit lieu de s'attendre que tôt ou tard elles se brouilleroient. Il étoit par conséquent très important de s'assurer d'un des meilleurs Généraux du siecle, & de l'ôter pour jamais à l'Ennemi. M. *de Keith* fut déclaré Feld-Maréchal le 18 de Septembre 1747, & au mois d'Octobre 1749 le Roi joignit à cette Dignité celle de Gouverneur de *Berlin*, & l'*Ordre de l'Aigle noir*. Ses appointemens furent fixés à 12000 écus, sans compter plusieurs émolumens, & les gratifications qu'il reçut de tems en tems.

A peine M. *de Keith* fut-il à *Berlin* que son mérite y fut admiré, & ses talens en tout genre reconnus. L'*Académie Royale* s'empressa d'orner sa Liste d'un nom si illustre, & l'aggrégea au rang de ses Membres honoraires.

Il passa ainsi quelques années dans les douceurs d'un repos, le seul qu'il ait presque goûté pendant toute sa carriere; & il fit voir qu'il ne possédoit pas moins les vertus du Citoyen que les qualités du Héros. La Providence vouloit cependant qu'il rentrât dans la scene des combats, & qu'il y terminât sa glorieuse vie. Au mois d'Août 1756, lorsque le Roi occupa la *Saxe*, M. *de Keith* l'accompagna. La colomne qu'il commandoit vint se réunir aux autres devant *Pirna*.

De là on entra en *Boheme*, & M. *de Keith* étant arrivé au Camp d'*Ausfig* le 19 de Septembre, y prit le commandement en chef. Le Roi arriva le 28, & la Bataille de *Lowositz* fut donnée le 1 d'Octobre. Le Maréchal fut pendant toute cette action à côté du Roi, c'est à dire, au milieu des dangers. FRÉDERIC étant revenu en *Saxe*, le 13 d'Octobre, *Keith* garda le commandement en *Boheme*. Il eut ordre de son Maître de ramener les Troupes en *Saxe*. Etant parti de *Lowositz*, il rejoignit le Roi à *Linay* le 23 d'Octobre; & l'Armée prit ses quartiers d'hiver. Arrivé à *Dresde* avec le Roi, le 14 de Novembre, M. *de Keith* fut chargé d'aller complimenter de la part du Monarque la Reine de *Pologne* & la Famille Royale; & il eut une commission semblable le 9 de Décembre, à l'occasion du jour de naissance du Roi de *Pologne*, aussi bien que le premier jour de l'an 1757. Ce Guerrier si redoutable paroissoit alors le plus poli des Courtisans. Mais c'est pourtant aux champs de Mars qu'il faut retourner pour lui payer le tribut d'admiration qu'il mérite. Le grand Général *Brown* ne le lui refusoit pas, & avoit pour lui la plus haute estime. *Keith* justifia à tous égards, pendant le cours de cette guerre, la haute réputation qu'il avoit acquise dans toutes celles où il avoit d'abord servi, & ensuite commandé.

La Campagne de 1757 sera à jamais mémorable dans les Annales du Monde, & notre Héros y joua un des principaux rôles. Les *Prussiens* pénétrerent par quatre endroits, dans la *Boheme*; *Keith* étoit avec le Roi. Après diverses marches, l'avantgarde *Prussienne* se trouva sur la Montagne blanche, devant *Prague*. La bataille donnée au pied des murs de cette Ville fut gagnée par les *Prussiens*; & la plus grande partie de l'Armée vaincue se jetta dans *Prague*. On l'y assiégea, & le côté le plus vif des attaques fut celui où le Maréchal commandoit. Sans donner ici un journal de ce Siége, il suffira de parler de la furieuse sortie que M. *de Keith* eut à essuyer. Après des efforts incroyables de valeur de part & d'autre, les Ennemis furent repoussés avec une grande perte jusqu'à trois cens pas au-delà du chemin couvert. La tête & le bras de M. *de Keith* terminerent glorieu-

sement

fiment cette action, qui dura plusieurs heures; & il eut la gloire d'être admirablement secondé par le Prince FERDINAND, Frere du Roi. Cette premiere sortie se fit la nuit du 23 au 24 Mai. Il y en eut une autre la nuit du 27 au 28, qui ne réussit pas mieux aux Ennemis. Le siége continuoit toujours, & il avançoit même; mais il étoit presqu'impossible d'esperer la réduction d'une aussi grande Ville, bien fortifiée, & défendue par 40000 hommes. Ces difficultés jointes à l'échec de *Collin* le 18 de Juin, obligerent de lever le siége de *Prague*. Dès le 19 on emmena la grosse Artillerie, & le 20 l'Armée fut en marche. M. *Le Grand*, à présent Général-Major *), porta à M. *de Keith*, (dont il a été Ajudant-Général en *Russie*,) les ordres du Roi, pour faire la retraite; & elle se fit dans le meilleur ordre du monde, sans la moindre perte, malgré toutes les tentatives des Ennemis. *Keith* ne montra pas moins d'intelligence de son métier dans cette occasion que dans toutes les autres. Les Troupes qu'il conduisoit, arriverent le 22 à *Budin*, & le 25 elles prirent un Camp, dont la droite étoit appuyée sur *Lowositz*, & la gauche sur *Leutmeritz*. Le Roi y arriva le 20. & alla le 29. se joindre au reste de l'Armée à *Bautzen*. M. *de Keith* demeura en *Boheme* avec 16000 hommes; & ayant tiré de ce Royaume les subsistances nécessaires pour les envoyer en *Saxe*, il rentra dans l'Electorat, & alla se réunir au Roi le 12 d'Août en *Lusace* près de *Bautzen*.

Pendant ce tems-là *Soubise* & les *François* s'approchoient de la *Saxe*. Le Roi s'avança pous couvrir ce Païs, & le Maréchal l'accompagna. Ils vinrent jusqu'à *Kirschleben* avec une Armée fort foible, parce qu'il avoit fallu laisser un Corps au Prince FERDINAND *de Brunswick* pour tenir *Richelieu* en respect, & un autre au Prince MAURICE pour avoir l'oeil sur le Général *Haddick*. Celui-ci fit pourtant une apparition devant *Berlin*, dont le Roi fut instruit au Camp de *Naumbourg*. Les ennemis crurent que le moment étoit venu de fondre sur FRÉDERIC & de l'accabler. Le Roi vola au secours de ses Etats avec une partie de sa petite Armée, & ne laissa par conséquent

 qu'une

*) J'écrivois ceci en 1760.

qu'une poignée de monde au Maréchal pour résister aux forces de *Soubise*, combinées avec les Troupes de l'*Empire*. Il se replia sur *Leipzig*, & envisagea d'un oeil intrépide tous les mouvemens d'un Ennemi qui lui étoit si supérieur en nombre. Ayant même fortifié son Corps, il se rapprocha, vint à *Halle*, jetta des ponts sur la *Saale*, pour faire passer ses Troupes, & le 3 de Novembre il joignit le Roi à *Rosbach*. Deux jours après fut remportée par les *Prussiens* l'une des plus célébres victoires de cette guerre. Le combat, qui ne dura qu'une heure & demie, fut suivi de la déroute la plus complette. On prétend que six bataillons *Prussiens* de l'aile gauche, les seuls qui allerent au feu, déciderent du sort de cette mémorable journée, où M. *de Keith* ceignit sa tête d'un nouveau laurier.

Le Roi vole en *Silésie*, & jour pour jour un mois après, défait les *Autrichiens*, comme il avoit défait les *François* à *Rosbach*, achevant cette année d'une maniere dont il n'y a point d'exemple dans l'Histoire. *Keith* n'avoit pas été inutile. Il avoit pris le Magazin de *Leitmeritz*, en prévenant d'un jour le Général *Marschall*, qui accouroit pour le sauver. *Prague* trembla, & crut voir les *Prussiens* de nouveau devant ses murs. Mais la saison étoit trop avancée. M. *de Keith* rentra en *Saxe*, & arriva à *Chemnitz*, sans avoir perdu un seul homme, le 5 de Décembre, jour où son Maître gagnoit la bataille de *Lissa*, ou *Leuthen*, qui fut suivie de la reprise de *Breslau* & de *Lignitz*.

Plus M. *de Keith* servoit le Roi, plus le Roi sentoit combien ses services lui étoient utiles. Il voulut conférer avec lui sur les opérations de la campagne prochaine, au commencement de 1758. Le 15 de Mars le Roi quitta *Breslau* pour se rendre à son Armée, qui occupoit les montagnes par lesquelles la *Silésie* est séparée de la *Boheme*. *Schweidnitz* fut arraché aux Ennemis le 16 d'Avril. Toute l'Armée *Prussienne* se rassembla ensuite aux environs de *Landshut*. M. *de Keith* eut ordre d'investir *Olmütz*, qui fut bientôt assiégé dans les formes. Ce siége fut meurtrier, & traversé par divers obstacles, qui obligerent enfin à le lever. M. *de Keith* dirigea encore cette opéra-

tion

tion, & le fit avec tout le ſuccès qu'on pouvoit eſpérer. Il y eut pendant ſa retraite diverſes actions, où le Maréchal ſe montra tel qu'il avoit toujours été. L'Armée *Pruſſienne* demeura à *Kœnigsgrætz* juſqu'au commencement d'Août, & rentra en *Siléſie*, lorsqu'il fut queſtion de s'oppoſer aux progrès des *Ruſſes*.

Une maladie empêcha M. *de Keith* de ſuivre le Roi, & de ſe trouver avec lui à la bataille de *Zorndorff*. Mais, s'il échapa aux dangers dont il y auroit été menacé, ſa fin n'en étoit pas moins prochaine, & la mort voloit, pour ainſi dire, autour de lui, prête à le frapper d'un coup funeſte. A' peine rétabli, il vint trouver à *Breslau* le Roi, qui, auſſitôt après la victoire remportée ſur les *Ruſſes*, étoit venu prendre les meſures néceſſaires pour détruire également les projets du Maréchal *Daun*. Le 11 d'Octobre, le Maréchal étoit à *Radewitz*, amenant un grand convoi à l'Armée du Roi. *Daun* épioit le moment de battre les *Pruſſiens*, ſans le trouver. Il crut que la nuit lui ſeroit plus favorable que le jour, & vint en effet à bout de ſurprendre le Camp des *Pruſſiens* entre *Bautzen* & *Hochkirck*, le 14 d'Octobre avant la pointe du jour. Le bruit de la groſſe Artillerie réveilla M. *de Keith*, qui fut auſſitôt à cheval, & ſe porta où ſa préſence étoit néceſſaire, & par conſéquent au fort du danger. Trois fois les *Autrichiens* plierent ſous l'effort de ſon bras. Les ténébres ne l'empêchoient pas de porter les coups les plus terribles & les aſſurés. Mais ces coups le firent reconnoître, on diſtingua ſa voix; & l'on crut que ſa perte, ſi l'on pouvoit la cauſer, vaudroit autant que le gain d'une bataille. Ce malheureux deſſein n'eut que trop de ſuccès. Il reçut deux bleſſures dans le bas-ventre, & un boulet de canon abattit ſon cheval. On voulut le remonter, mais il ne put ſe ſoutenir, tomba entre les mains de ceux qui l'aidoient, & expira au lit d'honneur, ſur le champ de bataille. Le Général *Autrichien* rendit par-là cette nuit vraiement fatale aux *Pruſſiens*, par leſquels il fut d'ailleurs ſi vigoureuſement repouſſé, qu'il ne retira aucun fruit de cette ſurpriſe, & qu'elle n'empêcha le Roi, ni de dégager *Neiſſe*, ni de

demeurer maître de la *Saxe*. Le Général *Lascy* reconnut le corps du Maréchal au milieu des morts, & le fit enterrer avec tous les honneurs militaires. *Berlin* souhaita cependant d'être dépositaire des précieux restes de son digne Gouverneur, & obtint qu'on les y ramenât. Il y eut à cette occasion de nouvelles obséques très-solemnelles, qui furent célébrées le 3. de Fevrier 1759.

Ainsi disparut en quelque sorte un des plus grands hommes de ce siécle, digne d'être comparé à ces Hommes illustres dont la Grece & l'ancienne Rome se sont glorifiées. Sa physionomie annonçoit ce qu'il étoit. D'une stature au-dessus de la médiocre, & d'une taille bien proportionnée, il avoit le teint brun, les sourcils épais, les traits agréables, mais surtout un air de bonté qui lui gagnoit les coeurs dès le premier abord. Il avoit l'air d'un Pere de famille respectable, qui veut être craint, mais qui veut encore plus être aimé. Son tempérament étoit des plus vigoureux; cependant les fatigues incroyables qu'il avoit endurées commençoient à l'affoiblir. Son esprit étoit encore meilleur que son corps. Il auroit brillé dans les Sciences & dans les Lettres, si sa vie n'avoit été remplie, comme on vient de le voir. On a vu peu de Généraux aussi éclairés que lui. Il entendoit & parloit l'*Ecossois*, l'*Anglois*, le *François*, l'*Espagnol*, le *Russe*, le *Suédois*, l'*Allemand* & le *Latin*; & il lisoit les Auteurs *Grecs*. Sa conversation ordinaire étoit en *François*. Il s'y exprimoit parfaitement bien, & avec précision, n'étant pas grand parleur. Il avoit vu toutes les Cours de l'*Europe*, grandes & petites, depuis celle d'*Avignon* jusqu'à la résidence du Kan des *Tartares*; & partout il avoit plû, comme s'il eût été dans son séjour natal. Général, Ministre, Courtisan, Sçavant, tous ces personnages si différens lui séoient également bien. On a vu des gens consommés dans l'étude sortir de sa conversation comme en extase, & ayant peine à en croire leurs oreilles.

Le

Le métier de la Guerre étoit pourtant sans contredit son fort, & il y a excellé. Quand on repasse sa vie, on est confondu par la multitude de ses exploits, & on a peine à le suivre dans tous les lieux où il s'est distingué. Mais ce qui doit rendre sa mémoire à jamais précieuse, c'est qu'il étoit un Guerrier humain, qui n'a rien épargné pour adoucir les calamités de la guerre, & pour diminuer le nombre des malheureux qu'elle fait.

Il fuyoit tous les amusemens frivoles, & sçavoit s'occuper d'une maniere digne de lui. Il étoit grand homme pour ses domestiques, qui ne lui ont jamais rien vû faire qui dérogeât à son caractere, & qui étoient en même tems pénétrés de la douceur avec laquelle il les traitoit. S'il faloit tracer un Parallele, on ne pourroit le comparer mieux qu'à *Aristide*.

Quoiqu'il eut un coeur sensible, & qu'il ne fût pas exempt de cette passion qui n'a jamais deshonoré les Héros, quand ils n'en ont pas été les esclaves, il a vécu dans le célibat, & n'a pas couru les risques de transmettre son grand nom à des héritiers incapables de le soutenir.

ELOGE

DE

M. DE VIERECK *).

Quand même l'usage des Eloges académiques ne seroit pas établi au point d'être regardé comme un devoir, l'Eloge que vous allez entendre seroit le tribut indispensable que cette Compagne doit, non seulement à un de ses Membres les plus distingués, mais surtout à un Chef qu'elle a vu pendant plusieurs années à sa tête, & sous l'administration duquel elle a joui de tous les avantages que les conjectures où elle se trouvoit alors, pouvoit lui permettre d'espérer. Au milieu donc de ces Monumens, dont le nombre s'accroit de jour en jour par les pertes que nous faisons, que celui de M. *de Viereck* tienne toujours un rang distingué! Qu'il transmette à nos successeurs le souvenir des obligations que nous lui avons, & le témoignage des sentiments par lesquels nous les avons reconnues!

Adam Otton de Viereck, Ministre actuel d'Etat, de Guerre & des Finances de Sa Majesté, Chevalier de l'Ordre de l'Aigle noir, & du St. Empire Romain, Chef du College supérieur de Médecine, Capitaine des Baillages de *Crottorf* & de *Gatersleben*, *Senior* de l'Ordre de St. Jean, & Commandeur résident à *Lagow*, *Sous-Senior* & Chanoine du Chapitre de *Halberstadt*, Prêvot du Chapitre collégial de la même ville, Seigneur héréditaire de *Weitendorf*, *Düdinghausen*, *Buch*, *Caro* & *Birckholtz*, nâquit le 10 Mai 1684. Il étoit d'une des plus anciennes familles de la Noblesse de Mecklenbourg. Son éducation répondit à son extraction; & après avoir fait ses humanités sous des précepteurs domestiques, il acheva la carriere de ses études avec beaucoup de succès dans les Universités de *Halle*, & de *Francfort sur l'Oder*.

Mais

*) Lu dans l'Assemblée publique du 25 Janvier 1759.

Mars l'enleva bientôt aux Muses. M. *de Viereck* entra en qualité de Lieutenant dans les Gardes du Duc ANTOINE ULRIC de BRUNSWICK; & pour ne pas laisser échaper les occasions qui se présentoient alors d'apprendre le mêtier de la guerre sous les plus grands Généraux de ce siecle, il alla comme Volontaire faire la campagne de 1705 dans l'Armée des Alliés. Ce n'étoit pourtant pas dans cette profession que la Providence le destinoit à blanchir, & à s'élever aux premiers honneurs. Son esprit, sa politesse, & sa capacité dans les affaires, le conduisirent à paroitre dans les Cours, à y plaire, & à être employé. En 1707, il fut un des Cavaliers qui composoient la suite de la Princesse CHRISTINE ELISABETH, fiancée à l'Archiduc, depuis Empereur sous le nom CHARLES VI. & qui a partagé le Thrône avec cet auguste Epoux.

La Cour de Prusse, qui a été de tout tems en possession d'acquérir, autant qu'il est possible, les sujets les plus distingués en tout genre; s'attacha M. *de Viereck*, qui entra d'abord au nombre des Gentilshommes de la Chambre de FRÉDERIC I. Toujours plus goûté à mesure qu'il étoit mieux connu, on ne vit personne qui fut plus propre que lui à faire les honneurs de la splendide Ambassade envoyée en 1711. à *Francfort sur le Mein* pour l'élection de l'Empereur. Il fut donc Marêchal de cette Ambassade; & deux ans après la même qualité lui fut de nouveau conférée dans celle des Plénipotentiaires du Roi au Congrès d'*Utrecht*. Ce fut lui qui eut l'honorable commission de porter à FRÉDERIC I. les articles du Traité de paix.

Il étoit tems néanmoins que M. *de Viereck* entrât dans les affaires proprement dites. Vieillir dans les Cours, & vieillir comme simple Courtisan, est un rôle, si non deshonorant, au moins disgracieux. Un bon esprit se trouve bientôt excédé par ces brillantes puérilités qu'on nomme cérémonial; il cherche en mûrissant des occupations plus dignes de lui; & ne passe par ces postes, que comme un voyageur par les gîtes qui le menent au terme de son voyage. L'année 1714 fut celle où M. *de Viereck* entra dans les Emplois, comme Conseiller Privé de la Régence de *Cleves*. Une commission pour la-

quelle il alla en France en 1716. revêtu du caractere d'Envoyé, le tira pour quelque tems de ce nouveau genre de vie; mais, dès qu'il eut rempli l'objet de sa mission, il revint à *Cleves*, & se remit aux affaires. On ne sauroit douter que ses services n'ayent été agréables au nouveau Monarque qu'il servoit depuis la mort de Frédéric I. puisque, dès l'année 1719, Frédéric Guillaume, qui, entre tant de qualités éminentes dont il étoit doué, a eu surtout celle de démêler, avec un discernement aussi rapide que sûr, les personnes capables de le bien servir, le fit venir à *Berlin*, le décora du titre de Ministre, & le plaça dans ce qu'on appelloit alors le Commissariat général de Guerre. A' n'envisager les choses que du côté de l'ambition, c'étoit arriver tout d'un coup au comble des desirs, à ce but qui pour le plus grand nombre n'est qu'une terre promise, & auquel les autres ne parviennent gueres qu'au déclin de leur carriere. Près de quarante années de fidéles services rendus depuis cette époque, font voir que M. *de Viereck* servoit par principes, & remplissoit une véritable vocation.

Les honneurs les mieux mérités ont été abondamment semés sur sa longue & glorieuse route. En 1723. il eut la Présidence de la Chambre de Guerre & des Domaines de la Marche Electorale; & au mois de Janvier 1727. il prit séance dans le Directoire général de Guerre & des Finances en qualité de Ministre actuel & dirigent.

L'ordre des tems nous conduit aux liaisons de M. *de Viereck* avec l'Académie. Pour s'en faire une idée, il faut se rappeller la constitution primitive de la Société Royale des Sciences. Frédéric I. son fondateur, avoit voulu qu'elle eût un double Chef, l'un pour les Sciences avec le titre du Président, l'autre pour les affaires oeconomiques, & pour lui frayer dans les occasions l'accès au Throne, avec la dignité de Protecteur. Cette dignité fut d'abord conférée à M. *de Printzen*; ensuite à M. *de Creutz*; & M. *de Viereck* qui la revêtit en 1733, ne l'a quittée en 1744 que pour la voir devenir un des fleurons de la Couronne de son auguste Maître. Circonstance bien glorieuse pour lui, & qui a non seulement comblé, mais infiniment surpassé, toutes nos espérances.

Je

Je trouve dans les anciens Régiſtres de notre Académie, que M. *de Viereck* s'inſtalla dans ſa charge de Protecteur le 5 de Juin 1733, dans une Aſſemblée compoſée de ſeize Académiciens, dont quatre ſont encore en vie, & deux rempliſſent aujourd'hui très dignement les places de Directeurs de l'Académie. M. *de Viereck* promit à la Société de veiller à ſes intérêts, & de lui rendre auprès du Roi tous les bons offices qui dépendroient de lui. Jamais promeſſe n'a été plus fidélement accomplie. Mais, pour ſentir tout le prix de la conduite du Protecteur de la Société, il faudroit ſe rappeller ce qu'étoit alors la Société, combien de contre-tems elle avoit éprouvé, & combien elle en avoit encore naturellement à craindre. Je ne leverois pas un bout du voile qui cache, & qui doit cacher, ces tems nubileux, ſi je pouvois m'en diſpenſer ſans ingratitude pour la mémoire de celui dont je fais l'Eloge, & dont l'Eloge intéreſſe ſur tout l'Académie par cet endroit. M. *de Viereck* fut le Protecteur, mais Protecteur effectif de la Société dans toute la force du terme; il fut le ſage pilote d'une nacelle battue des flots, il la préſerva du naufrage, & la conduiſit juſqu'au port aſſuré de ce Renouvellement, qui l'a mis pour jamais à l'abri des écueils & des tempêtes. Il agit en véritable pere de cette Société, en ami généreux & affectionné de tous ceux qui la compoſoient. Nous en avons des témoins authentiques; & le plus reſpectable de tous, c'eſt ſans contredit celui, qui, parvenu aux honneurs ſupremes par la même route qui y avoit conduit M. *de Viereck*, par celle des talens & des ſervices, tenoit alors la plume de l'Académie, & à qui j'ai eu l'honneur de ſuccéder dans le Sécrétariat. M. *de Viereck*, par un effet de cette ſympathie qui unit les hommes ſupérieurs, à quelque diſtance que le ſort les ait placés, donnoit dès lors toute ſa confiance à celui que le Roi en a jugé depuis ſi digne qu'il en a fait le premier Miniſtre de Thémis dans toute l'étendue des vaſtes Etats ſoumis à ſa domination. C'eſt ainſi que la Société, au milieu de ſes traverſes, trouvoit encore dans ſon propre ſein des reſſources véritablement ménagées par la Providence pour prévenir ſon entiere & finale ruine.

Telle fut toute la vie de M. *de Viereck*; une ſuite de devoirs importans, remplis avec la derniere exactitude; un tiſſu d'actions auſſi belles

les que bonnes, des années toujours semblables les unes aux autres, toujours consacrées au bien public. C'est ainsi qu'il est parvenu à la vieillesse la plus respectable, & au Doyenné dans le Ministere; titre plus grand, si je ne me trompe, que celui de Premier-Ministre, qui, dans les Cours où il est usité, ne dénote presque jamais que la faveur, la foiblesse, ou le caprice, du Souverain qui le confere.

En 1733. M. *de Viereck* devint Commandeur de l'Ordre de St. Jean, & bientôt après le plus ancien des Chevaliers de cet Ordre. Et en 1745 il fut décoré du grand Ordre de l'Aigle noir. La fortune d'un particulier ne sauroit aller plus loin; mais, ce qui est infiniment plus rare, la fortune n'a jamais été mieux d'accord avec le mérite.

M. *de Viereck* avoit été marié deux fois: la premiere, en 1718 avec *Catherine Louise de Gersdorff*, fille unique du Lieutenant-Général de ce nom. Il perdit cette épouse en 1728. & répara cette perte l'année suivante en s'unissant avec *Marie Amélie*, Comtesse de *Finckenstein*, fille ainée du Feld-Maréchal Comte de *Finckenstein*. Il ne reste de ces deux mariages que des filles, savoir du premier Madame la Générale *d'Itzenplitz*, & Madame la Colonelle Comtesse *de Finckenstein* *); du second, Mesdames *de Pannewitz*, & *de Voss*, & Mademoiselle *de Viereck*.

Il n'est plus besoin de revenir aux qualités de l'esprit & du cœur de M. *de Viereck*; elles ont été la base de tous les faits rapportés dans cet Eloge. Le respect pour la Religion, l'attachement à ses Maitres, & à l'Etat, les vertus sociales, les vertus domestiques, la décence, la régularité des moeurs, tant d'autres qualités vrayement supérieures qui étoient réunies dans cet illustre défunt, nous fourniroient encore, une ample matiere, si leur souvenir tout récent n'avoit plus de force que ce que nous pourrions en dire. Ces qualités étoient soutenus par une figure avantageuse & par un air imposant. On ne voit gueres de physionomies tout à la fois plus respectables & plus prévenantes que l'étoit celle de M. *de Viereck*. Sans affecter aucune hauteur, sans pousser trop loin la familiarité,

*) Depuis la lecture de cet Eloge, cette Dame a été enlevée à la Cour, & à la Société en général, dont elle étoit un des plus beaux ornemens. Une excellente plume lui a consacré un Monument digne d'elle.

rité, il tenoit ce juste milieu que saisissent si difficilement ceux qui occupent les premieres places. Soit qu'on ne fût qu'admis à son audience, soit qu'on eût des liaisons plus particulieres avec lui, les personnes de tout ordre qui se trouvoient à portée de le voir & de l'entretenir, ne remportoient jamais de son accueil & de ses discours qu'une impression très satisfaisante.

Sa santé avoit paru pendant longtems chancelante, & la couleur de son teint en particulier n'annonçoit pas, au milieu de sa carriere, qu'il dût la pousser aussi loin. Cependant l'exactitude du régime & l'usage annuel des eaux minérales avoient affermi peu à peu son tempérament, de façon que les années ne sembloient point lui imprimer ces signes de décadence qu'elles trainent après elle. Plus que septuagénaire, il étoit aussi laborieux qu'il l'avoit toujours été, & sans qu'il lui en coutât davantage. Ce ne fut donc que peu de tems avant sa mort qu'il se déchargea d'une partie du fardeau des affaires, sans en abandonner cependant le timon. Il auroit été à souhaiter que sa fin eut été exemte de quelques épreuves, par lesquelles elle a été marquée; mais Dieu vouloit, en l'y faisant passer, qu'il donnât des preuves de soumission & de résignation aux volontés de cet Etre supreme, dignes de couronner sa vie & son Eloge. Une maladie fâcheuse dont le siége étoit dans l'intérieur du palais & du gosier, l'exposa à de longues & douloureuses souffrances. Mais, dans le tems même où il étoit sur le point d'en voir la fin avec celle de sa vie, il fut encore appellé à soutenir le coup le plus sensible. Son Epouse, Dame d'un rare mérite, & avec laquelle il avoit passé près de trente ans dans les délices d'une parfaite union, étant tombée malade, mais sans qu'on la crût en danger, mourut entre ses bras le 22 de Juin 1758. Leur séparation ne fut pas longue: il la suivit le 11 de Juillet, âgé de 74 ans, & 4 mois. La mort, en rejoignant cet illustre couple, semble avoir voulu que leur noms, gravés en même tems sur la même tombe, demeurassent aussi l'un à côté de l'autre dans le coeur de ceux qui les regrettent, & dans le souvenir de la postérité.

ELOGE
DE M. SPROEGEL.

Les vies les plus remplies, les carrieres le plus utilement occupées, sont souvent celles sur lesquelles on peut le moins s'étendre, parce qu'elles ne présentent qu'un même objet continuellement répété. Comme on dit tout de celui qui a passé ses jours dans un état de simple végétation, en disant: Il a vêcu; on dit de même de celui dont l'activité a été appliquée sans relâche à un même travail, tout ce qu'on en peut dire, en disant: Il a fait son devoir, il a rempli sa tâche. Mais, autant que le premier de ces caracteres est flêtrissant, autant le second est honorable. Il n'y a point de meilleurs Citoyens que ceux, qui s'étant une fois consacrés à des fonctions utiles, ne les interrompent que quand la mort vient trancher le fil de leur vie. Cette espece de célébrité qu'on se procure par la variété de ses occupations, & par la multitude des genres dans lesquels on se produit, n'est pour l'ordinaire & quand on la considere sans prévention, qu'un prestige à l'illusion duquel il n'y a que des esprits superficiels qui puissent céder. On ne fait gueres avec un succès décidé que ce qu'on fait avec une application soutenue.

Ces réflexions sont un résultat anticipé de l'Eloge que je consacre aujourd'hui à la mémoire de celui de nos Confreres que la mort vient de nous enlever. En parcourant les faits d'une vie de douze lustres, je n'y ai, pour ainsi dire, vû qu'un fait; c'est que M. *Sproegel* s'étant consacré par goût à la Médecine, l'a professée avec applaudissement. Le reste n'offre que quelques dates dont il me paroitroit assez inutile de chercher à remplir les intervalles par de simples hors-d'oeuvre.

Otton

Otton Théodore Sproegel nâquit le 24 d'Avril 1699 à *Mitteldorff*, lieu distant de *Halberstadt* de sept milles, où son pere avoit un bien de compagne. Ce Pere, nommé *Michel Sproegel*, étoit Docteur en Médecine; il pratiquoit son art à *Halberstadt*, & étoit aussi Médecin de la Forteresse de *Regenstein*. Il avoit pour femme *Sophie Elisabeth Juncker*, fille d'un Sécretaire de la Ville. M. *Sproegel* fut le cinquieme fils qui nâquit de ce mariage, & il est mort le premier, ses quatre freres ainés étant encore en vie.

Il eut d'abord des Maîtres domestiques; il fut ensuite envoyé à l'Ecole de Halberstadt, sous la direction de M. le Surintendant *Lüders*; il se rendit de là à *Gotha*, où M. *Vockerodt* étoit Recteur; & enfin il vint à Berlin, au College de *Joachim*, qui étoit alors gouverné par M. le Docteur *Volckmann*. Il crut avec raison que rien ne prépare mieux à la Médecine que la connoissance exacte de l'Anatomie & des opérations Chirurgiques; c'est ce qui l'engagea à se rendre en 1716. à *Hambourg* où il y avoit un Opérateur fort renommé, le Sr. *Eggelrecht*, sous lequel il fit de rapides progrès. Il donna ensuite quelques années aux études de Médecine pour lesquelles il choisit l'Université de *Jena*. Ce fut néanmoins dans celle de *Helmstaedt* qu'il reçut le degré de Docteur en Médecine en 1720. Il auroit fait aussitôt après les voyages qu'il croyoit propres à le perfectionner si la peste qui étoit alors en France ne l'eut engagé à les différer. Il se fixa donc à Hambourg, & commença à y pratiquer. Mais en 1722. l'obstacle qui l'avoit arrêté étant levé, il parcourut l'Allemagne, la Hollande, la Suisse, la France, l'Angleterre, l'Italie, voyant dans toutes ces contrées les objets & les hommes de la connoissance desquels il pouvoit profiter.

Ces courses étant finies, il revint à *Hambourg*, & reprit encore la pratique pendant quelque tems; mais bientôt après il préféra à ce séjour celui de Berlin, où il étoit attiré par l'agrément de vivre avec Mrs. ses freres qui s'y étoient établis. Il y fut bientôt connu sur le pied d'habile Médecin; & il confirma cette réputation au point d'avoir été pendant plus de trente ans un de ceux qui ont eu le plus de vogue

vogue dans cette Capitale. Cela lui fit acquérir de bonne heure ce degré d'expérience qu'on n'obtient qu'auprès du lit des Malades, & qui est pour l'ordinaire un guide plus sûr que les théories auxquelles ce secours manque. Il avoit toute l'exactitude, toute l'assiduité, toutes les attentions, qui peuvent inspirer de la confiance aux malades: ses visites n'étoient point des apparitions momentanées, il les prolongeoit même quelquefois au delà de ce que le grand nombre de ses pratiques sembloit lui permettre. Il suivoit avec intelligence les grandes routes frayées dans la cure des principales maladies; & il n'étoit point du nombre de ces Médecins hazardeux, qui se croyent autorisés à immoler des victimes aux progrès de leur Art. Il vouloit qu'on se conformât exactement à ses ordonnances; & prenoit sur ceux qui recouroient à lui une espece d'autorité qu'il convient en effet de prendre sur des esprits aussi foibles que le sont pour l'ordinaire ceux des malades. Je suis donc en droit d'assurer ici d'après la voix publique, qui est le meilleur garant dans ce cas, que M. *Sproegel* étoit un Médecin estimable par ses connoissances, par l'usage qu'il en faisoit, & par plusieurs qualités morales, qui lui ont procuré l'estime & l'affection de ceux qui ont eu des liaisons avec lui, & en particulier de personnes d'un rang très distingué. Il est après cela très difficile d'apprécier au juste les vrais talens d'un Médecin; le vulgaire n'en juge que d'après des notions tout à fait insuffisantes; & les seuls Juges compétens, c'est à dire, ceux du métier, n'ont pas toujours l'esprit assez libre de partialité & de passion pour démeler au travers du nuage de la rivalité un mérite qui leur fait souvent ombrage.

En 1727. M. *Sproegel* s'unit par les liens du mariage avec une personne digne de son choix. Elle se nommoit *Catherine Louise Lüder*, & étoit Veuve du Sécretaire privé *Kalmann*. Il a passé 32 ans avec cette Epouse dans une étroite union, dont il reste présentement à sa Veuve pour gages quatre fils, *Jean Theodore*, Docteur en Médecine, & Professeur de Physiologie & d'Anatomie au College Royal de Médecine, dans lequel nous avons la satisfaction de voir déja revivre le défunt; *Charles Louis*, Sécretaire privé de la Chambre de Justice; *Gott-*

Gottfried Guillaume, qui fait actuellement ses études à Francfort sur l'Oder, & *Otton Fréderic*, qui fréquente les Ecoles de Berlin & se destine à la Théologie. Une fille du premier lit de Madame *Sproegel* a épousé M. le Professeur *Meckel*, Membre de cette Académie.

Considérons à présent M. *Sproegel* comme Académicien. En cherchant dans nos Régistres ce qui le concerne, j'ai trouvé qu'au mois d'Octobre 1735, lorsque le Roi *Frideric Guillaume* de glorieuse mémoire, par un choix dont l'Académie se félicite encore aujourdhui, conféra à M. *Eller* la qualité de Directeur de l'Académie, Mrs. *Sproegel* & *Schaarschmidt* furent nommés pour remplir deux Professions du College d'Anatomie & de Chirurgie, que la promotion de ce Directeur laissoit vacantes. Environ deux ans après, en Août 1757, il plût à S. M. d'assigner les pensions de ces deux Professeurs sur la Caisse de la Société; & l'on saisit cette occasion pour rendre justice à leur capacité reconnue en les aggrégeant à cette Compagnie.

M. *Sproegel* justifia cette distinction en enrichissant les Mémoires Latins de la Société, connus sous le nom de *Miscellanea*, des Observations importantes que la pratique de son art lui fournissoit. Elles se trouvent au nombre de trois dans le sixieme Volume imprimé en 1740. Depuis ce tems-là la Société, ni l'Académie qui lui a succédé, n'ont profité, ni de ses lumieres, ni même, au moins n'a-ce été que fort rarement, de sa présence aux Assemblées. Ce n'est pas qu'il ne fut un très bon Académicien, & par l'esprit, & par le coeur. Mais il étoit emporté par un vrai tourbillon, entrainé par le torrent des visites qui l'occupoient tout le jour, souvent même la nuit, qui lui laissoient à peine le loisir de pourvoir aux besoins naturels, & qui probablement ont usé son corps & abrégé sa vie; en sorte qu'on peut lui appliquer l'embleme de la lampe, qui se consume en rendant service aux autres. Il est assez ordinaire d'ailleurs à l'Académie, quand elle a d'habiles Médecins dans son Corps, de perdre à proportion de ce que le Public gagne. Mais, dévouée comme elle l'est elle-même à l'utilité publique, elle ne s'afflige point de ces pertes, & regarde toujours comme des Membres dignes de son Corps ceux qui rendent des bons services à la Société.

M. *Sproegel* étoit d'une constitution vigoureuse; mais il avoit eu pendant le cours de sa vie de grandes maladies, qui avoient fait craindre une mort encore plus prématurée. Les fatigues de son genre de vie ne lui permettoient jamais de se rétablir parfaitement: dès qu'il se sentoit le moins du monde en état d'agir, l'oisiveté lui étoit insupportable. Avec cela les intempéries de l'air auxquelles sa profession expose, contribuoient à le miner. On s'en appercevoit depuis quelques années par de gros rhumes & de fortes oppressions qui l'incommodoient tous les hyvers. Son courage & les restes de sa vigueur naturelle continuoient cependant à le soutenir jusqu'à ce que, vers la fin de l'année passée, l'oppression monta au plus haut point, & fut accompagnée de l'enflure des pieds. Cela le força de garder la chambre, & d'employer les rémedes les plus convenables à son état. Ils furent suivis d'un soulágement apparent, dont il ne manqua pas de profiter à son ordinaire pour recommencer ses visites. Mais ce répit ne dura que quelques jours, au bout desquels survint une rechûte complette & décisive. Après avoir lutté encore quelques semaines contre son mal, qui s'étoit changé en hydropisie de poitrine, & avoir employé ce tems à revêtir des dispositions convenables à son état, il mourut le 18 de ce mois (de Mai) à deux heures du matin, âgé de 60 ans, un mois & cinq jours.

FIN.